1 群とは

◁ ▷

自然界には様々な対称性を発見することができる．特に結晶構造のように物理に現れる対称性は，その物質の性質や現象と深くかかわっている．この，対称性と物理現象の関係を解き明かすには物理の理論に対称性を反映させる必要がある．このとき対称性は，群という数学的概念を用いて通常記述される．この講義では，群とその表現とその物理での応用について解説する．有限群の例を挙げた後，回転群や SU(3) などの連続群の性質とその表現，物理への応用を説明する．群論の理解のためには線形代数の理解が必須であるため，線形代数の復習を交えながら，群とその表現の例，連続群とその表現へと進む．

授業の目的は，群とその表現を理解し，物理へどのように応用されているかを学ぶことにある．

1.1 対称性と群

この節ではまず，対称性の概念が**群**の概念を導くことを見てみよう．まず対称性の定義とは何なのか？ここで考えている対称性とは，ある種の変換に関する不変性を意味する．たとえば，2 次元の図形を考えると次のような対称性を考えることができる．

1. **左右対称性**：左右対称であるとは中心線を境に右側と左側が互いに鏡像になっている場合である．この場合対称性に付随する変換は中心軸に関する鏡映 (像) 変換 σ と考えられる．実は左右対称な図形は面に垂直に置かれた鏡に映った像が元の像と重なるので単に鏡像不変な図形と呼ぶことができる．これがつまり左右対称性または**鏡像変換不変性**である．物理ではある現象が鏡に映った現象と比べたときに，どちらが鏡像かを区別できないとき鏡像変換不変性という対称性があり，そのような系を**鏡像対称**または**パリティー不変**な系と呼ぶ．

2. **点対称性**：点対称とは，ある点を中心に図形を回転する回転変換，たとえば $\frac{2\pi}{n}$ 回転に関して不変になる場合であり，回転対称または**回転不変**と呼ぶ．

3. **並進対称性**：結晶格子のようにある方向に系を平行移動しても元に戻る場合，並進対称であるという．

このように，対称性はそれに関連した変換と共に考えることができる．さらにこれらの対称性を特徴づける変換には次のような構造があることが分かる．

対称変換の構造

1. **積の構造**：変換は続けて行うことができ，それらを引き続き行った変換をひとつの変換と思うことができる．このように変換を続けて行うことを変換の積と考えることができる．たとえば $\vec{a}$ の並進を $t_{\vec{a}}$ と書くと，続けて行えば $2\vec{a}$ の並進を得る．それを $t_{\vec{a}} \cdot t_{\vec{a}} = t_{2\vec{a}}$ と考えることができる．
2. **恒等変換** 何もしない変換を恒等変換と呼ぶ．この変換を e と表すと，鏡映ならば $\sigma^2 = e$ が成り立つ．
3. **逆変換** ある変換を元に戻す変換をその変換の逆変換と呼び，変換 σ に対して逆変換を σ^{-1} と書く．並進ならば $t_{\vec{a}}^{-1} = t_{-\vec{a}}$

様々な変換に関して，これらの構造を見つけることができる．この構造を抽象化したのが群である．

1.2 群の定義

群 G とは，変換または演算の集合でその元を $g \in G$ と表す．このとき，集合 G の元 a, b, c が次のような性質を持つとき G を群と呼ぶ．

定義 群：

1. 積「·」が定義されていて，G が積について閉じている. これを次のように表す.

$$\cdot \quad : \quad \forall a, b \in G \quad \to \quad a \cdot b \in G \tag{1.1}$$

（積は記号を省略して単に ab と書くことが多い.）

2. 次のような単位元 $e \in G$ が存在する．

$$ae = ea = a \tag{1.2}$$

(1 や 1_G と書かれることもある．)

3. 任意の元 $a \in G$ に関して次のような逆元 a^{-1} が存在する．

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e \tag{1.3}$$

4. 結合則が成り立つ．

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{1.4}$$

群は一般に次の性質を持つ．

Theorem ：

1. **単位元の一意性**：単位元は１つである．

   証明：e' も単位元とする．$ae' = e'a = a$ が成り立つので $a = e$ とすると $ee' = e'e = e$ 一方，e が単位元なので $ae = ea = a$ で $a = e'$ とすると $ee' = e'e = e'$. よって $e = e'$ を得る．

2. **逆元の一意性**：逆元は１つである．
   証明：b が $ba = e$ ならば $baa^{-1} = ea^{-1}$ なので結合則より $b = a^{-1}$

一般に２つの変換を続けて行う場合，その順序を変えると異なる結果を得る．このため群の定義は積の順序を入れ替えたときに一致するという項目がない．しかし，対称変換の中には順序を入れ替えても常に同じ結果を出すような種類の変換がある．そのような変換に対応した群を次のように定義する．

定義 可換群：

群の積が

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.5}$$

を満たす時，可換群 (アーベル群) と呼ぶ．

問題

1. 元 a の左逆元 a_L^{-1}，$a_L^{-1}a = e$ と右逆元 a_R^{-1},aa_R^{-1} が同一であることを示せ．
2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．

答え

1. 結合法則を使う．
2. $abb^{-1}a^{-1}$ は結合則を使うと単位元 e なので問題の式が成り立つ

1.3 群の例

ここでは，群のいくつかの例をリストしておく．どのような群が存在するかの感じをつかむのが目的であり，今の段階ですべてを理解する必要はない．

1.3.1 有限群

前節で見たように，変換を元とする集合は群 G と考えることができる．このとき

定義 位数：

G の元の数を G の**位数** (order) という．

さらに

定義 有限群：

位数が有限，つまり集合として元の数が有限の群を有限群と呼ぶ．

有限群の例

1. 位数 n の**巡回群** $\mathcal{C}_n$(または Z_n)：巡回群は c_n で**生成**され $(c_n)^n = e$ が成り立つ群．集合としては
$$\mathcal{C}_n = \{e, c_n, c_n^2, \cdots c_n^{n-1}\} \tag{1.6}$$
と書ける．例えば，ある軸周りの $\frac{2\pi}{n}$ 回転変換の集合．
c_n はもっとも簡単には，$\omega^n = 1$ の解：
$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}} \tag{1.7}$$
と同一視することができる．

定義 生成元：
群のすべての元がそれらの中のいくつかの元の積で書けるとき，それらの元を生成元と呼ぶ．

2. 鏡像群 P：鏡像変換 σ と単位元 e の作る群，
$$P = \{e, \sigma\} \tag{1.8}$$

3. クラインの４元群 K：生成元が σ_1, σ_2，で $\sigma_i^2 = e$ を満たすアーベル群．
$$D_2 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\} \tag{1.9}$$

4. 位数 N の**加群**：可換群，$a + b$ のように積を $+$ で書く．単位元は 0 と書く．いわゆる，剰余群である．
$$a + b = c\ (mod\ N) \tag{1.10}$$

1.3.2 部分群

定義 部分群：
群 G の部分集合 $G' \subset G$ を考える．この時，G' の任意の元の積が再び G' の元になるとすると，明らかに G' そのものが群になる．このような群を部分群と呼ぶ．

例 巡回群 $\mathcal{C}_4$ が，$\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}}$ で生成されている時
$$\mathcal{C}_4 = \{e, \omega, \omega^2, \omega^3\} \tag{1.11}$$
ω^2 で生成される巡回群は部分群である．
$$\{e, \omega^2\} \tag{1.12}$$
これは，$\mathcal{C}_2$ と同一視できる．これを群が**同型**と言う[1]．

[1]例えば鏡像群 P と巡回群 $\mathcal{C}_2$ は変換としては異なるが群の構造は同じなので同型である．

1.3.3 回転群

空間の回転は明らかに群になる．つまり２つの続いた回転の結果は必ず一つの回転で実現することができるので積と思える．逆回転は逆元であり，無回転が単位元である．これを回転群と呼ぶ．回転は一般に角度 θ のように連続パラメータでラベルされるので元は無限個あることになる．このように連続パラメータでラベルされる群のことを連続群と呼ぶ．回転群は物理で最も応用の広い群である．

定義 連続群またはリー群：

連続パラメータでラベルされる群のことを連続群と呼ぶ．

もう少し具体的に回転群を特徴づけるために，３次元空間のベクトル

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

の回転を考えてみよう．回転では，ベクトルの内積は変わらない．つまり，回転はベクトルの内積

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{v}^t \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i \tag{1.14}$$

を不変に保つ[2]．回転後のベクトルは，実行列 A を使って

$$\mathbf{v}' = A\mathbf{v} \quad , \tag{1.15}$$

または成分で表示すると

$$v'_i = A_{ij} v_j \tag{1.16}$$

と表すことができるので，回転 $g \in G$ の代わりにこの行列を考える．

ベクトルの長さを変えないという条件を行列の言葉に翻訳すると，

$$\mathbf{v}'^t \mathbf{w}' = (A\mathbf{v})^t A\mathbf{w} = \mathbf{v}^t A^t A\mathbf{w} \tag{1.17}$$

なので，この右辺が $\mathbf{v}^t\mathbf{w}$ に等しければよい．つまり，

$$A^t A = 1 \tag{1.18}$$

ならば良い．このように，$A^t = A^{-1}$ が成立する行列 A を**３次元直交行列**と呼ぶ．A で与えられる回転後，更に B で回転すると

$$\mathbf{v}'' = B\mathbf{v}' = BA\mathbf{v} \tag{1.19}$$

を得るが，全体が一つの回転になるので BA も直交行列になっているはずである．実際

$$(BA)^t(BA) = A^t B^t BA = A^t \mathbf{1} A = \mathbf{1} \tag{1.20}$$

[2]行列 A に対して，A^t は A の転置行列を表す．同様にここの $\mathbf{v}^t$ は $\mathbf{v}$ を行列と思ったときの転置行列，つまり３次元の横ベクトルを表す．

であるので，A,B それぞれが直交行列ならばその積も直交行列になる．そこで，そこで直行行列の集合は

直交群

1. A, B が直交行列ならば AB も直交行列 [積]
2. 無回転の行列は単位行列 $\mathbf{1}$，$\mathbf{1}A = A\mathbf{1}$[単位元]
3. 逆回転の行列 $A^{-1} = A^t$ も直交行列．[逆元]
4. 行列の積の結合則 [結合則]

を満たすので群になる．3 次元直交行列の作る群を $O(3)$(orthogonal group) と呼ぶ．$O(3)$ はベクトルの長さを不変にする変換全てを含んでいるので回転だけでなく，鏡像変換も含んでいる．これは，直交行列の条件の行列式をとってみると

$$\det(A^t A) = (\det A)^2 = 1 \tag{1.21}$$

なので

$$\det A = \pm 1 \tag{1.22}$$

であることが分かる．このうち $\det A = -1$ の変換は回転のみだけでなく，鏡像変換も含むことが分かる．真の回転だけに対応した行列は

$$\det A = 1 \tag{1.23}$$

をみたし，これらの二つの条件を満たす群を特殊直交群 $SO(3)$ と呼ぶ．この授業では，単に回転群と呼ぶ．

特殊直交群は直交群の部分群である．

$$SO(3) = \{A | A^t A = \mathbf{1}, \det A = 1\} \subset O(3) = \{A | A^t A = \mathbf{1}\} \tag{1.24}$$

回転群と特殊直交群は同型である．

このように，行列の集合として群を特徴付けることができる．

行列群

直交群のように，行列に基づいて定義された群を**行列群**と呼ぶ．

1.3.4 複素数体上の群

前節では，実ベクトルの回転を考えたがここでは複素ベクトルの回転を考えてみる．まず最初に，複素数の変換を考えてみよう．

複素平面上の回転　複素数をガウス平面で表したとき

$$z = re^{i\theta} \tag{1.25}$$

と書くことができる．ここで，絶対値が 1 の複素数は群になる．絶対値が 1 の数は $e^{i\theta}$ と書くと[3]

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \tag{1.26}$$

なので積もまた絶対値が 1 である．この群はアーベル群で $U(1)$ と呼ぶ．

この群の元 $e^{i\theta}$ は，複素数 $w = re^{i\phi}$ に掛けると回転を引き起こす．つまり

$$e^{i\theta}w = e^{i\theta}re^{i\phi} = re^{i(\theta+\phi)} = w' \tag{1.27}$$

として得られた複素数 w' は w を原点を中心に θ だけ回転させて得られる点である．

U(1)

絶対値が 1 の複素数は通常の積のもとでアーベル群になり，その群を $U(1)$ と呼ぶ．

群と多様体　位相はガウス平面で半径 1 の円周上の点を 1 つ決める．このことから，円周上の 2 点に積が定義されていると考えることもできる．このように一般に連続群はある多様体と同一視することができる．

ユニタリー群　複素ベクトル空間の回転を考えることもできる．n 次元の複素ベクトル

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \tag{1.28}$$

の内積 $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ を

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{z}^\dagger \mathbf{w} = \sum_i \bar{z}_i w_i = \bar{z}_1 w_1 + \cdots + \bar{z}_n w_n \tag{1.29}$$

で定義する．ここで $\mathbf{z}^\dagger$ は $\mathbf{z}$ の共役ベクトル

$$\mathbf{z}^\dagger = (\bar{z}_1, \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n) \tag{1.30}$$

を表す．ただし，$\bar{z}$ は z の複素共役である．

複素ベクトルの 1 次変換を，複素数を成分に持つような行列（複素行列）U を使って

$$\mathbf{z}' = U\mathbf{z} \tag{1.31}$$

で与える．複素回転は内積を不変にする変換

$$(\mathbf{z}', \mathbf{w}') = \mathbf{z}'^\dagger \mathbf{w} = \mathbf{z}^\dagger U^\dagger U \mathbf{w} = \mathbf{z}^\dagger \mathbf{w} \tag{1.32}$$

[3]物理では位相 (phase) と呼ぶことがある．

と定義する．つまり，複素空間の回転行列は

$$U^\dagger U = \mathbf{1} \tag{1.33}$$

を満たす．このような条件を満たす行列をユニタリー行列と呼び，実ベクトルにおける直交群と同じようにユニタリー行列の集合は群をなし，**ユニタリー群** $U(n)$ と呼ばれる．さらに，

$$\det U^\dagger U = \det U^\dagger \det U = (\det U^t)^* \det U = |\det U|^2 \tag{1.34}$$

よって，一般に

$$\det U = e^{i\phi} \tag{1.35}$$

である．特に $u \in U(n)$

$$\det u = 1 \tag{1.36}$$

を満たす行列は $U(n)$ の部分群をなし，**特殊ユニタリー群** $SU(n)$ と呼ばれる．一方，位相 $z = e^{i\phi}$ は 1 次元ユニタリー群と考えることが出来るので $U(1)$ とよぶ．そこで

まとめ

$$SU(n) \subset U(n) \quad , \quad U(1) \subset U(n) \tag{1.37}$$

が成り立ち，一方

$$U(n) = SU(n) \times U(1) \tag{1.38}$$

である．

連続群の次元　連続群は群の元が連続パラメータでラベルされているので位数は無限になる．それに代わって，独立なパラメータの数を数えることができる．これを群の**次元**と呼ぶ．

1. $SO(3)$ の次元は 3.

   証明 $A \in G$ は $3 \times 3 = 9$ 個の実パラメータで決まる．条件 $A^t A = 1$ は 9 個の関係式を与えるが $A^t A$ は対称行列なのでそのうち独立な条件は 6 個である．よって $9 - 6 = 3$.

2. $SU(n)$ の次元は $n^2 - 1$.

   証明 $u \in SU(n)$ は，複素 $n \times n$ 行列なので $2n^2$ の実パラメータで決まる．一方条件式，$u^\dagger u = 1$ は $2n^2$ 個の条件式だが，$u^\dagger u$ がエルミートなので独立な条件は n^2 個である．さらに $\det u = 1$ は 1 個の独立な条件を与えるので結果として $2n^2 - (n^2 + 1) = n^2 - 1$.

1.3.5　合同変換群

次の章では，群の構造と写像についての直交群 $O(3)$ の有限部分群で，ある図形を不変にする変換の作る群を合同変換群と呼ばれる群を例に考える．例えば，３角形の**合同変換群** $\mathcal{C}_{3v}$: $\frac{2\pi}{3}$ 回転 $\mathcal{C}_3 = \{c_3, c_3^{-1}\}$ と 3 個の反転 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ からなる位数 6 の群を作る．それぞれの変換は図 1 のように表される．

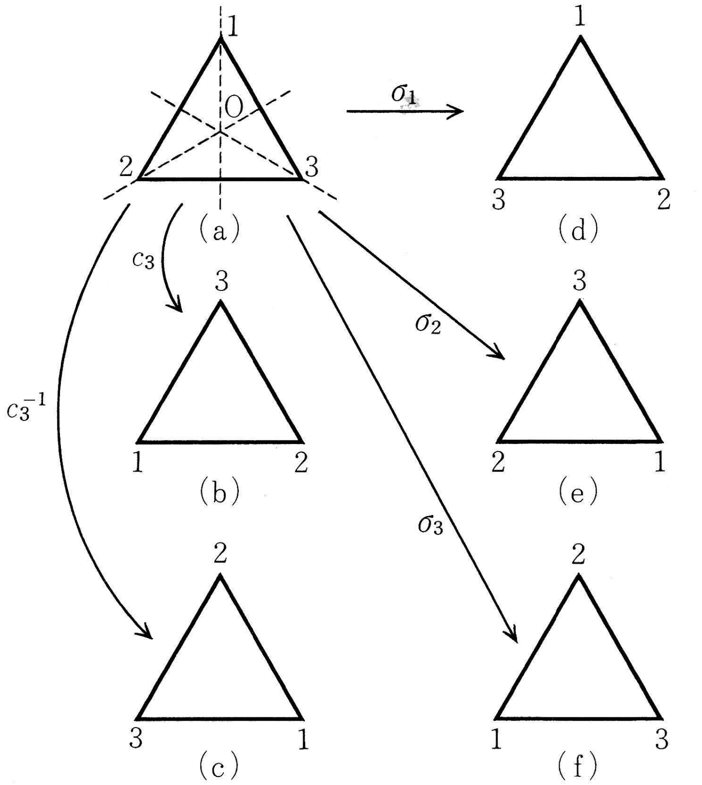

Figure 1: 三角形の合同変換群

群の積の表を作ってみると次のようになる．
$\mathbf{C}_{3v}$ の積の表

$$ba \quad = \quad \begin{array}{c|cccccc} b\backslash a & e & c_3 & c_3^{-1} & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \hline e & e & c_3 & c_3^{-1} & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ c_3 & c_3 & c_3^{-1} & e & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ c_3^{-1} & c_3^{-1} & e & c_3 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & e & c_3 & c_3^{-1} \\ \sigma_2 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_1 & c_3^{-1} & e & c_3 \\ \sigma_3 & \sigma_3 & \sigma_1 & \sigma_2 & c_3 & c_3^{-1} & e \end{array} \tag{1.39}$$

問題　クラインの四元群 K の積表を上の例に従って作ってみよ．