4 有限群の表現□

◁ ▷

4.1 表現

群の表現とは一般に群 G から V 上の線形演算子への準同型写像のことである．特にここで扱う行列表現とは，群 G の各元 g_i に対して $d \times d$ の行列 $D(g_i)$ を対応させ，群の積に対し

$$D(g_i g_j) = D(g_i)D(g_j)\ ,\quad D(g^{-1}) = D^{-1}(g)\ ,\quad D(e) = \mathbf{1} \tag{4.1}$$

(準同型) となるようにすることである．つまり，

> d 次元ベクトル空間 V 上の線形変換を与える行列の空間を $M(\mathbb{C}, d)$ とする．群 G からの準同型写像（つまり１対１とは限らない）
>
> $$D\ :\ G\ \to\ M(\mathbb{C}, d)\quad :\quad g_i \mapsto D(g) \tag{4.2}$$
>
> を群 G の行列表現または単に**表現**と呼び，$D(g)$ を**表現行列**，V を**表現空間**と呼ぶ．また d を**表現の次元**と呼ぶ．特に，行列がユニタリー行列の時にはそれを**ユニタリー表現**と呼ぶ.

表現の種類

1. 全ての元に対して単位行列を対応させても表現である．これを**恒等表現**または**自明な表現** (trivial representation) と呼ぶ.
2. 全ての表現行列が異なるときこれを**忠実な表現** (fathful representation) と呼ぶ.
3. 共役変換は，群準同型写像であることを説明した．そこで，ある元 $a \in G$ の,$g_i \in G$ への作用を
$$Ad_a g_i = a g_i a^{-1} = g_j D^{Ad}_{ji}(a) \tag{4.3}$$
とすると，これは表現になる．これを共役表現 (Adjoint representation) と呼ぶ.

問題 D^{Ad} は群から行列への写像を与えている．これが表現になっていることを証明せよ.（準同型写像であることを示せばよい.）

4.2 行列表現の具体例

以下では，C_{3v} の３次元空間における行列表現を考える．この表現は可約表現であり，その表現の既約分解を具体的に行う．この例を通じて，表現の基本的な事項を説明する.

4.2.1 C_{3v} の行列表現

1. 例にあるように，正三角形の合同変換群 $\mathcal{C}_{3v}$ を頂点の位置を（１，２，３）と呼んで，それぞれの変換に対応した置換として書くと

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

と表すことができるので，$\mathcal{C}_{3v}$ と S_3 は同型である．

2. 対称群と見た時の C_{3v} の自然な表現は 3 次元空間の 3 個の単位ベクトル $|i\rangle$ を取り替える変換として考えると得られる．表現行列はその基底の変換を次のような行列で表したものになっている：

$$\hat{g}|i\rangle = |g(i)\rangle = \sum |j\rangle D(g)_{ji} \tag{4.5}$$

3. それぞれの行列は

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D(c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D(c_3^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

例えば，この表現行列を使って計算すると

$$\hat{c}_3(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle) = (|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)D(c_3) = (|2\rangle, |3\rangle, |1\rangle)\ . \tag{4.7}$$

となり，基底の変換を再現することが分かる．

問題 上記の行列を使って，C_{3v} の積の表と，行列の積が等しいことを示せ．つまり

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2) \tag{4.8}$$

が成り立ち，表現になっていることを示せ．

4.2.2 既約表現と既約分解

これで，C_{3v} の行列表現が構成できたことになる．この例は，さらに表現の性質を教えてくれるので，もう少し詳しく見てみよう．

1. 表現の定義より，C_{3v} の全ての変換で

$$|v_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \tag{4.9}$$

が不変であることがわかる．これは，$|v\rangle$ が回転軸であることから明らか．図：

2. そこで，この $|v_0\rangle$ に直交するベクトルを次のように作ることができる．
$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3\rangle - |2\rangle) \tag{4.10}$$
$$|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|1\rangle - |2\rangle - |3\rangle) \tag{4.11}$$
図：

3. $|v_0\rangle$,$|v_1\rangle$,$|v_2\rangle$ は正規直交基底になっているので，元の基底から適当な回転で得ることができる．つまり，ある直交行列 T によって
$$|v_i\rangle = |j\rangle T_{ji} \tag{4.12}$$
と書ける．[9] さらに，
$$\hat{g}|v_i\rangle = \hat{g}|j\rangle T_{ji} = |k\rangle D_{kj}(g) T_{ji} = |v_j\rangle (T^{-1}D(g)T)_{ji} \tag{4.14}$$
である．ところが，$|v_0\rangle$ は不変なので
$$T^{-1}D(g)T = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array}\right) \tag{4.15}$$
のようにブロック状になっているはずである．それぞれのブロックはやはり表現になっているので
$$T^{-1}D(g)T = \begin{pmatrix} D^{(A_1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(E)}(g) \end{pmatrix} \tag{4.16}$$
のように 2 個の表現行列 $D^{(r)}(g)$ を与えている．

4. それぞれは $1 \times 1 (2 \times 2)$ の行列になっており，単に 1 次元表現とも呼ばれる．１次元表現 A_1 はすべての元に 1 を対応させる**自明な表現**になっている．

5. E は 2 次元表現で, 新しい軸では $|v_1\rangle$ と $|v_2\rangle$ で定まる平面の回転と反転である．それぞれの表現は
$$\begin{aligned} D(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(c_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D(c_3^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ D(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D(c_3^{-1}) = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.17}$$
ただし，$\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

[9] 具体的には
$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

6. このように，表現がいくつかの小さな表現に分解されるとき**可約表現** (reducible) とよび，もはや分解できないときは**既約表現** (irreducible) と呼ぶ．可約な表現を例のように分解することを**既約分解**と呼ぶ.

7. C_{3v} の例は，３次元直交座標を使って定義した３次元表現が A_1 と E と２つの表現に既約分解されることを示している．C_{3v} には，もう一つの１次元表現 A_2 が存在する．A_2 は C_{3v} を対称群 S_3 として見たとき，奇置換が -1，偶置換が 1 とする表現である.

8. ３次元表現空間 $V = \{|i\rangle\}$ は，$V_1 = \{|v_0\rangle\}$ と $V_E = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ の直和に分解され，それぞれ群の作用によって混ざることはない．それぞれの基底で張られる空間を**不変部分空間**と呼ぶ.

既約表現

既約表現の表現空間 V の不変部分空間は自分自身か自明なものしかない.

4.3 シュールの補題

1. シュールの補題１：２つの既約表現 $D^{(i)}(g)$ が，ある行列 M で

$$\forall g \in G \quad : \quad MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M \tag{4.18}$$

を満たすとき，２個の表現は同値 (M が同形写像を与える) であるかまたは $M = 0$ である.

いま，それぞれの表現空間を $V^{(i)}$ とする. すると，$M : V^{(1)} \to V^{(2)}$ である.

$d_1 > d_2$ のとき $\exists \mathbf{v} \in V^{(1)}$，$M\mathbf{v} = 0$ つまり $\mathbf{v} \in KerM$ が存在する.

$$MD^{(1)}\mathbf{v} = D^{(2)}M\mathbf{v} = 0 \tag{4.19}$$

ところが，$V^{(1)}$ は表現空間なので $D^{(1)}\mathbf{v}$ も $KerM$．g を変えてもこのことは変わらないので $KerM$ は不変部分空間である．既約表現が不変部分空間を持つことになり矛盾.

$d_2 > d_1$ とすると，

$$MD^{(1)}(g)\mathbf{v} \subset V^{(2)} \tag{4.20}$$

つまり $MV^{(1)} \subset V^{(2)}$ であり，表現 $V^{(2)}$ が不変部分空間をもつので既約であることに矛盾する.

$d_1 = d_2$ の時，$M\mathbf{v} \neq 0$ ならば，$MD^{(1)}\mathbf{v} = MV^1 \neq 0$．よって M は正則なので，$D^{(1)} = M^{-1}D^{(2)}M$ が成り立つ．このような２つの表現は，**同値**である.

2. シュールの補題２：

$$\forall g \in G \quad D(g)M = MD(g) \tag{4.21}$$

ならば，$M = c\mathbf{1}$

証明 c を M の固有値の一つとし，$A = M - cE$ とする．一方，シュールの補題１より $AD(g) = D(g)A$ が成り立つので A は正則か 0．$\det A = 0$ より $A = 0$ つまり $M = cE$.

まとめ：表現の既約分解

1. 群からの $D \in Aut(V)$ への準同型写像があるとき，D とその作用する空間のペアを表現と呼ぶ (D, V)．行列表現では D を表現行列，V を表現空間と呼ぶ.
2. ある表現があった時，一般に行列 T による共役変換で得られる表現は表現として等価である.
$$D' = TDT^{-1} \quad \Rightarrow \quad D' \simeq D \tag{4.22}$$
3. 可約表現とは，適当な行列 T によって，D がブロック対角になる場合（完全可約[a]）.
4. ある可約表現がブロック対角になった時，それぞれのブロックは，積で閉じている．つまり，そのブロックだけ取り出しても表現になっている．既約表現とは，このように，小さな行列に分解されない表現である.
5. 全ての群の元に関して，ブロックに分かれているということは，表現空間は，群の作用によってそのブロックに対応した部分空間から出ることはない．これを**不変部分空間**とよぶ.
6. 既約表現の表現空間には，不変部分空間は自明なものを除いて存在しない.
7. 表現行列がユニタリー行列の時，ユニタリー表現とよぶ．またユニタリー表現の間の同値な表現をユニタリー同値とよぶ.
8. 群の既約表現を α, β の添え字で区別する．既約分解は
$$D = \oplus_\alpha D^\alpha, \quad V = \oplus V^\alpha \tag{4.23}$$

[a]三角行列になる場合と区別するときには完全可約と呼ぶ.