# 3 場の正準理論

◁ ▷

ここまで，具体的な例について場の作用を取り上げ，場の方程式がどのように変分原理で求められるかを見てきた．この章では，場の理論におけるラグランジュ形式およびハミルトニアン形式について議論する．

## 3.1 オイラー・ラグランジュ方程式

オイラー・ラグランジュの方程式を一般的なラグランジアンについて求めておこう．

$n$ 個のスカラー場 $\varphi_a$ $(a=1,...,n)$ の作用は一般に

$$S=\int d^4x\mathcal{L}(\varphi_a,\partial_\mu\varphi_a) \tag{3.43}$$

と書ける．ここで，$\mathcal{L}(\varphi_a,\partial_\mu\varphi_a)$ はラグランジアン密度と呼ばれる．例えば実スカラー場では

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+m^2\varphi^2) \tag{3.44}$$

であった．ラグランジアンは一般に場 $\varphi_a$ とその一階微分 $\partial_\mu\varphi_a$ の多項式であり，微分の項は高々２次までとする．

変分原理を適用するために，場の微小変化 $\varphi_a+\delta\varphi_a$ を考える．ここで $|\delta\varphi|,|\partial_\mu\varphi|$ はいたるところ場の量に比べて十分小さいと仮定する．すると作用の変分は，変分 $\delta\varphi$ についてテーラー展開の１次までで

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left(\mathcal{L}(\varphi_a+\delta\varphi_a,\partial_\mu\varphi_a+\partial_\mu\delta\varphi_a)-\mathcal{L}(\varphi_a,\partial_\mu\varphi_a)\right)\\ &= \int d^4x\left(\delta\varphi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}+\partial_\mu\delta\varphi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}\right)\\ &= \int d^4x\left(\delta\varphi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}-\delta\varphi_a\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}+\partial_\mu(\delta\varphi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a})\right)\end{aligned} \tag{3.45}$$

と書ける．表面項は落とせる[5]ので結局最小作用の原理は

$$\delta S=\int d^4x\delta\varphi_a(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a})=0 \tag{3.46}$$

を要請し, 任意の変分に対して成り立つことから運動方程式が

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_a}=0 \tag{3.47}$$

[5]場の変分は空間的無限遠方で十分小さく（場の量 $\varphi$ そのものが空間的無限遠では十分早く 0 になる.）また，時間の始点と終点では運動方程式を導くときは変化しない.

ともとまる．これが，場に関する**オイラー・ラグランジュ方程式**である．作用原理を使うことのメリットは，上のオイラー・ラグランジュ方程式を見ても分かるようにラグランジアン密度がローレンツ不変ならば，方程式が共変になることである．

ここで，一般にラグランジアン密度の満たすべき条件を上げておく．

1. 局所性：$\mathcal{L}$ は同一点の場とその微分の関数である．
2. 実関数である：エネルギーが実数 $\Rightarrow$ ハミルトニアンがエルミート，確率解釈ができる．
3. $\partial_\mu \phi$ の高々２次まで．つまり $\dot{\phi}$ の２次までである．
4. ローレンツ不変である．並進不変でもあるので，ポアンカレ変換に対して不変である．
5. 繰り込み可能：相互作用に制限を与える．

### 3.1.1 多自由度系の変分法と汎関数の変分について

$\delta\varphi(x)$ というのは，ある点の付近だけ場を変形すると考える．このとき，４次元では

$$\frac{\delta\varphi(y)}{\delta\varphi(x)} = \delta^4(y-x) \tag{3.48}$$

３次元では,

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{y})}{\delta\varphi(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \tag{3.49}$$

という関係式が成り立つ．つまり

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\int d^4x\varphi(x) = \int d^4x\delta^4(y-x) = 1 \tag{3.50}$$

が成り立つ．この意味は次のように考えると理解しやすい．このような汎関数の微分の考え方は，後にハミルトニアン形式をやる時に必要になってくるのでここで少し詳しく説明しておこう．

ここでは，３次元の場合を考える．まず簡単のために

$$F[\varphi] = \int d^3x\varphi(\mathbf{x}) \tag{3.51}$$

という汎関数を考えると，上記の汎関数微分は

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(\mathbf{x})} = \int d^3y\frac{\delta\varphi(\mathbf{y})}{\delta\varphi(\mathbf{x})} = \int d^3\mathbf{y}\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 1 \tag{3.52}$$

という結果を与える．このことを空間をセル状の分割して考えてみよう．それぞれのセルの位置を $\mathbf{x}_i$ と書き[6]，セルの体積を $\Delta^3_{\mathbf{x}}$ とすると，汎関数 $F$ と比べるべき式は

$$F[\varphi] = \sum \Delta^3_{\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}_i) \quad \left( = \sum \Delta^3_{\mathbf{x}} q_i \right) \tag{3.53}$$

である．ただし $\varphi(\mathbf{x}_i)$ は，$\mathbf{x}_i$ で指定されたセルの代表点での関数 $\varphi$ の値で，最後の式はそれを何か力学変数 $q_i$ と思ったときに対応する式である．ここで，力学変数 $\varphi(\mathbf{x}_i) = q_i$ の単なる偏微分をとってみると

$$\frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi(\mathbf{x}_j)} = \sum_i \Delta^3_{\mathbf{x}} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_i)}{\partial \varphi(\mathbf{x}_j)} = \sum_i \Delta^3_{\mathbf{x}} \delta_{ij} = \Delta^3_{\mathbf{x}} \tag{3.54}$$

となる．この式と，汎関数微分の定義式を見比べると，汎関数微分は

$$\frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{x}_i)} = \frac{1}{\Delta^3_{\mathbf{x}}} \frac{\partial}{\partial \varphi(\mathbf{x}_i)} \tag{3.55}$$

のように同一視すると良いことが分かる．実際この定義を使うと

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta \varphi(\mathbf{x}_i)} = 1 \tag{3.56}$$

が成り立つ[7]．つまり，次のような連続極限がなりたつ：

$$\frac{\delta \varphi(\mathbf{x}_i)}{\delta \varphi(\mathbf{x}_j)} = \frac{1}{\Delta^3_{\mathbf{x}}} \delta_{ij} \ \to \ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.58}$$

より一般の汎関数 $S[\varphi] = \int d^3x F(\varphi(x))$ の変分は

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi(y)} = \int d^3x \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \int d^3x \frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta^3(x-y) = \frac{\partial F}{\partial \varphi}(y) \tag{3.59}$$

ここで $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ は $F$ を $\varphi$ の関数（多項式）と思って微分することを意味し，微分の後も $x$ の関数である $\frac{\partial F}{\partial \varphi}(x)$（変分と区別する.）．よって，汎関数微分の結果は $y$ の関数になる．

ただし，作用の変分では，一般に場 $\varphi$ の微分も入ってくるので

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} + \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \frac{\delta \partial_\mu \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial \varphi} \delta^4(x-y) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu \delta^4(x-y) \right) \end{aligned}$$

[6]正確には３次元セルは $(x_i, y_j, z_k)$ という３個の整数 $i, j, k$ で指定される．ここで $\mathbf{x}_i$ と書いているのはこれを略して書いている．

[7]古典力学の多粒子系での次の計算を思い出すと分かりやすい．

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial q^i} \sum_j q_j = \sum_j \delta_{ij} = 1 \tag{3.57}$$

つまり，変分のときは座標 $x, y$ がラベル $i, j$ に対応している．

$$
\begin{aligned}
&= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial \varphi} \delta^4(x-y) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta^4(x-y) \right) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial \varphi}(y) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(y)
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

つまり,

$$
\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi(y)} = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial \varphi}(y) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}{\partial(\partial_\mu \varphi)}(y) \tag{3.61}
$$

のようにオイラー・ラグランジュ方程式に現れる変分を得る．このような，部分積分を含む例は変分に特徴的で多変数の場合でも

$$
\frac{\delta}{\delta q^i(t)} \int ds L(q^i(s), \dot{q}^i(s)) = \frac{\partial L}{\partial q^i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t) \tag{3.62}
$$

は，時間方向に関して汎関数微分を使うと同じ関係式が得られることを知っている．

### 3.1.2 複素スカラー場の作用

複素スカラー場は質量の等しい実スカラー場 2 個と等価である．

そこで，次のラグランジアン密度を考える．

$$
\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(\varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2) \tag{3.63}
$$

つまり

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + m_1^2 \varphi_1^2 + (1 \to 2)) \tag{3.64}
$$

ここで,

$$
\phi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \ , \quad \bar{\phi} = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{3.65}
$$

と書く．$m = m_1 = m_2$ ならばこれは

$$
\mathcal{L} = -\partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \phi - m^2 \bar{\phi} \phi \tag{3.66}
$$

と書ける．つまり複素場のラグランジアン密度は，質量の等しい 2 個の実スカラー場と等しい．

**問題**与えられた複素場の作用を実場 2 個の理論と思って変分を取った場合と，$\phi$ と $\phi^*$ を独立と思って求めた運動方程式が同じになることを示せ．

## 3.2 場のハミルトニアン形式

場の方程式を最小作用の原理から導く方法を解説してきたが，次は，この場の量を量子化したい．この授業では，量子力学における正準量子化の一般化として場の量子化を定義するので，ここでは場の正準形式を議論する．

まず，正準理論ではラグランジアンの時間積分が作用を与えるので，

$$S = \int dt L \tag{3.67}$$

と定義する．するとラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ が与えられているときは

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{3.68}$$

である．このラグランジアンは，ある点 $\mathbf{x}$ での場の量 $\varphi(\mathbf{x})$ を力学変数として，その時間発展を定義していると考えられる．このことは上のラグランジアンを空間をセル状分割し，空間積分をそのセルの和の形に書いてみると良く分かる．

$$L = \sum_{\mathbf{x}_i} \vartriangle^3_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}_i), \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i)) \tag{3.69}$$

ここで，$\vartriangle^3_{\mathbf{x}}$ は積分を微小セルの和と考えそのセルの体積である．$\mathbf{x}_i$ は空間上のセルの位置を表し $\varphi(\mathbf{x}_i)$ は，そのセルでの場の量の値である．場の空間微分も同様に隣り合うセル $\mathbf{x}_i$ の差分で近似すると考えると，場のラグランジアンは無限個の物理量 $\varphi(\mathbf{x}_i)$ の系 $L(\varphi(x_i), \dot{\varphi}(x_i))$ と考えられる．正準共役運動量はすると

$$p(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i)} = \vartriangle^3_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}_i), \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i))}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i)} \tag{3.70}$$

系の全運動量は，運動量 $p(\mathbf{x}_i)$ の総和として

$$\hat{p}_\varphi = \sum_{\mathbf{x}_i} p(\mathbf{x}_i) = \sum_{\mathbf{x}_i} \vartriangle^3_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}_i), \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i))}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i)} \tag{3.71}$$

とかけるので，連続極限をとると

$$\hat{p}_\varphi = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}), \dot{\varphi}(\mathbf{x}))}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x})} \tag{3.72}$$

と書ける．そこで

$$\pi_\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}), \dot{\varphi}(\mathbf{x}))}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{x})} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(\mathbf{x})} \tag{3.73}$$

を場の**共役運動量密度**と呼ぶ．多自由度系と考えた時の古典力学的な共役運動量との関係は

$$p(\mathbf{x}_i) = \vartriangle^3_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x}_i) \tag{3.74}$$

となり密度と体積要素の積と考えることができる．

さらにハミルトニアンは，多自由度系のハミルトニアン

$$H = \sum_{\mathbf{x}_i} p(\mathbf{x}_i) \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i) - L = \sum_{\mathbf{x}_i} \vartriangle^3_{\mathbf{x}} (\pi(\mathbf{x}_i) \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i) - \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}_i), \dot{\varphi}(\mathbf{x}_i))) \tag{3.75}$$

から，連続極限を取ると

$$H = \int d^3x(\pi(\mathbf{x})\dot{\varphi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}), \dot{\varphi}(\mathbf{x}))) \tag{3.76}$$

で与えられることが分かる．そこで，

$$\mathcal{H} = \pi(\mathbf{x})\dot{\varphi}(\mathbf{x}) - \mathcal{L} \tag{3.77}$$

を**ハミルトニアン密度**と呼ぶ．

多自由度系のポアッソン括弧は

$$\{\varphi(\mathbf{x}_i), p(\mathbf{x}_j)\} = \Delta^3_{\mathbf{x}}\{\varphi(\mathbf{x}_i), \pi(\mathbf{x}_j)\} = \delta^3_{\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j} \tag{3.78}$$

と定義されるので，体積要素 $\Delta^3_{\mathbf{x}}$ で両辺を割って連続極限を取ることで場のポアッソン括弧が求まる．デルタ関数の定義を思い出して，連続極限をとると

$$\{\varphi(\mathbf{x}_i), \pi(\mathbf{x}_j)\} = \frac{1}{\Delta^3_{\mathbf{x}}}\delta^3(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \ \rightarrow \ \{\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.79}$$

のように場のポアッソン括弧を定義すればよいことが分かる．

正準方程式は

$$\dot{\mathcal{O}}(\mathbf{x}) = \{\mathcal{O}(\mathbf{x}), H\} \tag{3.80}$$

と書ける．

**まとめ: 場のハミルトニアン形式**

スカラー場 $\varphi_a$ のラグランジアン密度が $\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a)$ で与えられているとすると

1. ラグランジアンは $L = \int d^3x\mathcal{L}$,
2. 正準共役運動量密度は
$$\pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_a} \tag{3.81}$$
3. ハミルトニアン密度は
$$\mathcal{H} = \pi_a\dot{\varphi}_a - \mathcal{L} \tag{3.82}$$
で与えられる．
4. ハミルトニアンは，ハミルトニアン密度の空間積分
$$H = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H} \tag{3.83}$$
で与えられる．
5. $\{\varphi_a(\mathbf{x}), \pi_{\varphi_b}(\mathbf{y})\} = \delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

## 3.3 例：スカラー場

正準形式の一般論をスカラー場に適用してみよう．スカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + m^2\varphi^2) \tag{3.84}$$

なので，運動量密度は

$$\pi_\varphi = \dot{\varphi} \tag{3.85}$$

である．ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \pi_\varphi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{3.86}$$

となる．正準方程式は，場とその共役運動量に関して

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(\mathbf{x}) &= \{\varphi(\mathbf{x}), H\} = \{\varphi(\mathbf{x}), \int d^3\mathbf{y}\frac{1}{2}\pi_\varphi^2(\mathbf{y})\} = \int d^3\mathbf{y}\pi_\varphi(\mathbf{y})\{\varphi(\mathbf{x}), \pi_\varphi(\mathbf{y})\} \\ &= \int d^3\mathbf{y}\pi_\varphi(\mathbf{y})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \pi_\varphi(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_\varphi(\mathbf{x}) &= \{\pi_\varphi(\mathbf{x}), H\} = \int d^3\mathbf{y}\frac{1}{2}\{\pi_\varphi(\mathbf{x}), (\nabla\varphi(\mathbf{y}))^2 + m^2\varphi^2(\mathbf{y})\} \\ &= -\int d^3\mathbf{y}(\nabla\varphi(\mathbf{y})\nabla^y\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + m^2\varphi(\mathbf{y})\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \\ &= \nabla^2\varphi(\mathbf{x}) - m^2\varphi(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{3.88}$$

と書ける．連立させると

$$\ddot{\varphi} = \nabla^2\varphi(\mathbf{x}) - m^2\varphi(\mathbf{x}) \tag{3.89}$$

となり確かにクライン・ゴルドン方程式を得る．

### 3.3.1 複素スカラー場

ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\phi - m^2\bar{\phi}\phi \tag{3.90}$$

質量の等しい２個の実スカラー場と等しいことを使っても良いが $\phi, \bar{\phi}$ を独立と思って

$$\pi_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dot{\bar{\phi}}\ , \quad \bar{\pi}_\phi = \dot{\phi} \tag{3.91}$$

としても同じ．するとハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \pi_\phi\dot{\phi} + \bar{\pi}_\phi\dot{\bar{\phi}} - \mathcal{L} = \bar{\pi}_\phi\pi_\phi + \nabla\bar{\phi}\nabla\phi + m^2\bar{\phi}\phi \tag{3.92}$$

ポアッソン括弧は

$$\{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{3.93}$$

**問題**正準方程式が複素スカラー場に関してもクライン・ゴルドン方程式を導くことを示せ．

## 3.4 場の理論における対称性

◁ ▷

古典力学においては対称性というのは，回転対称性や並進対称性がある．また，それに伴って角運動量や運動量の保存が出ることも学んだ．(Noether の定理) 量子力学や場の理論においても，もちろんそのような空間的対称性は存在し，それに伴って，角運動量やエネルギー運動量が保存する．

場の理論においてはさらに，これらの対称性に比べるとより抽象的な内部対称性と呼ばれる対称性も重要な役割を果たす．

まず，Noether の定理を導いておこう．

作用が場 $\phi^i$ のある種の変換

$$\phi^i \ \to \ \phi^i + \delta\phi^i \tag{3.94}$$

ただし，

$$\delta\phi^i = R^i_\alpha(\phi)\epsilon^\alpha \tag{3.95}$$

に対して不変であるとする．作用を

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu\phi^i) \tag{3.96}$$

Noether の定理を導くには，作用の変換に関する不変性を書く必要がある：

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\partial_\mu\phi^i \\ &= \int d^4x (\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)})\delta\phi^i + \partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\phi^i) = 0 \end{aligned} \tag{3.97}$$

ここで，運動方程式を使うと

$$\partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\phi^i) = 0 \tag{3.98}$$

つまり

$$j^\mu_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}R^i_\alpha \tag{3.99}$$

ただしこの保存 Current $j^\mu$ のことを Noether current と呼ぶ．

**Example** 複素スカラー場の位相変換に関する不変性． :

まず，複素場の位相変換を考えよう．このとき

$$\phi \ \to \ \phi' = e^{i\theta}\phi \tag{3.100}$$

無限小変換 $\theta \sim \epsilon$ を考えると：

$$\delta\phi = i\epsilon\phi \ , \quad \delta\bar{\phi} = -i\epsilon\bar{\phi} \tag{3.101}$$

よって，$R^i = i\phi$，$i = 1, \bar{1}$ と考え $R^{\bar{i}} = -i\phi$ る．またパラメータは一個なので $\alpha = 1$ だがここでは書かない．保存 Current は

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} R^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\phi}^i)} R^{\bar{i}} \\ &= -\partial^\mu \bar{\phi} \cdot (i\phi) - \partial_\mu \phi \cdot (-i\bar{\phi}) \\ &= -i\bar{\phi}(\overleftarrow{\partial}^\mu - \overrightarrow{\partial}^\mu)\phi \end{aligned} \tag{3.102}$$

で与えられる．ここで，$\overleftarrow{\partial}$ は左側の微分を取り，$\overrightarrow{\partial}$ は右側（通常）の微分を取ることを意味する．そこで，この保存 current に対応する保存量は

$$Q = \int d\mathbf{x}^3 j^0 = i \int d\mathbf{x}^3 (\dot{\phi}\bar{\phi} - \dot{\bar{\phi}}\phi) = i \int d\mathbf{x}^3 (\bar{\pi}_\phi \bar{\phi} - \pi_\phi \phi) \tag{3.103}$$

で与えられる．これは，電荷であることが後で電磁場との相互作用を見ることで分かる．

このように，変換のパラメータ $\theta$ が定数の場合を第一種ゲージ変換とよぶ．一方，この変換を局所的に行うことも考えることができる．局所的な変換とは，変換のパラメータが一般に場所によって異なってもよいとすることである．つまり

$$\phi(x) \ \rightarrow \ \phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x) \tag{3.104}$$

とすることである．このような変換を第２種ゲージ変換または局所ゲージ変換と呼ぶ．この局所ゲージ変換に対する対称性は量子電気力学や一般のゲージ理論の基本になる対称性である．

## 3.5 エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量の保存は時空の並進対称性から出ることはすでに古典力学などで知っている．ここでは場の理論における時空の並進対称性の帰結を考える．そこで，次の無限小並進を考える

$$x^\mu \ \rightarrow \ x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu \tag{3.105}$$

このとき，スカラー場は

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{3.106}$$

であるが，変分は同一点について考えるので (これを一般に Lie 微分と呼ぶ．)

$$\delta_L \phi = \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x' - \epsilon) - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) \tag{3.107}$$

とする必要がある．この変換で作用は不変であるが，先ほどの内部対称性と異なる点はラグランジアン密度は変化する．つまり，ラグランジアン密度もスカラーなのでこの変換のもとで

$$\delta_L \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) - \mathcal{L} = -\epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \tag{3.108}$$

と変換する．すると，上記の $\delta_L S = \int d^4x \delta_L \mathcal{L} = -\int d^4x \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$ となるので，ネーターの定理でそれを考慮すると

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}\delta\partial_\mu\phi^i \\ &= \int d^4x (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)})\delta\phi^i + \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)}\delta\phi^i) = \int d^4x \delta_L \mathcal{L} \qquad (3.109)\end{aligned}$$

よって保存則は

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\delta_L \phi - \delta_L \mathcal{L} = 0 \qquad (3.110)$$

から導かれる．それぞれの変換を代入すると

$$-\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\epsilon^\nu \partial_\nu \phi + \epsilon^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = 0 \qquad (3.111)$$

よって保存流は $J$ の代わりに $T^\mu_\nu$ と書いて[8]

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} R_\nu(\phi) + \delta^\mu_\nu \mathcal{L} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\nu \phi + \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \qquad (3.113)$$

このように時空の並進対称性から $\nu$ でラベルされた 4 組の保存流を得る．

一般に空間の並進に関する変分の $\epsilon^\nu$ 方向の保存量が，エネルギー運動量ベクトルと対応するので，それを $P_\mu = (-E, \mathbf{P})$ と書くと

$$P_\nu = \int d^3x T^0_\nu = \int d^3x (-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\partial_\nu \phi + \delta^0_\nu \mathcal{L}) = \int d^3x (-\pi_\phi \partial_\nu \phi + \delta^0_\nu \mathcal{L}) \qquad (3.114)$$

という関係を得る．ここで

$$T^{00} = \mathcal{H} \qquad (3.115)$$

になっているので，確かにその積分はエネルギーになっていることが分かる．このテンソル $T^\mu_\nu$ を**エネルギー運動量テンソル**と呼ぶ．

[8] ここで，変換が

$$\delta_L \phi = \epsilon^\nu(-\partial_\nu \phi) = \epsilon^\nu R_\nu(\phi) \qquad (3.112)$$

と書けるので，これを代入するとよい．