4 場の量子化

◁ ▷

場の理論では，各点で値が定まる場の量が物理量であることがわかった．そこで，場の量子化はこの場の量に関して量子化を行うことを意味する．ここでは，場の正準理論に現れるポアッソン括弧を交換子に置き換えることで量子化を実行する．

4.1 正準量子化

場の正準理論のところで考えたように，空間をセルに分割してラグランジアンをその和で近似する．

$$L = \sum_{\mathbf{x}_i} \Delta_{\mathbf{x}}^3 \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}_i), \dot{\phi}(\mathbf{x}_i)) \tag{4.1}$$

ただし，$\mathbf{x}_i$ は i 番目のセルの座標で和はすべてのセルに関して取る．このとき，正準共役運動量は

$$p(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}_i)} = \Delta_{\mathbf{x}}^3 \pi(\mathbf{x}_i) \tag{4.2}$$

で与えられ，ポアッソン括弧は

$$\{\phi(\mathbf{x}_i), p(\mathbf{x}_j)\} = \delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.3}$$

なので，これを量子化すると

$$[\phi(\mathbf{x}_i), p(\mathbf{x}_j)] = i\hbar\delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.4}$$

となる．ここで $\delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ は，$i = j$ の時 1 になるクロネッカーデルタである．これは (以下では $\hbar = 1$ とする)，正準運動量密度を使うと

$$[\phi(\mathbf{x}_i), \Delta_{\mathbf{x}}^3 \pi(\mathbf{x}_j)] = i\delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.5}$$

と書ける．つまり

$$[\phi(\mathbf{x}_i), \pi(\mathbf{x}_j)] = i\Delta_{\mathbf{x}}^{-3} \delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \tag{4.6}$$

である．ここで，

$$\sum_{\mathbf{x}_i} \Delta_{\mathbf{x}}^3 (\Delta_{\mathbf{x}}^{-3} \delta(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) = 1 \tag{4.7}$$

なので eq.(4.6) の右辺の $\Delta^3 \to 0$ 極限は，デルタ関数と同一視できる．よって量子化は

正準交換関係 (Canonical Commutation Relation)

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{4.8}$$

と残りの交換関係

$$[\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = 0\ , \quad [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 \tag{4.9}$$

で

与えられることになる．これを**正準量子化**と呼ぶ．

この式はシュレディンガー描像と考えるのが自然だが，ハイゼンベルグ描像として見れば**同時刻交換関係**の形の量子化の条件と考えられる．これらの量子化に伴う描像の違いは量子力学と同じ種類の任意性で，時間発展を演算子の変化と見るか状態ベクトルの時間発展と見るかの違いである．ここではまずシュレディンガー描像での量子化を進めていく．

4.2 スカラー場の量子化

量子化条件が分かったので，スカラー場を量子化してみよう．スカラー場のラグランジアン密度とハミルトニアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{4.10}$$

$$\mathcal{H} = \pi_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{4.11}$$

と書ける．場とその共役運動量をフーリエ変換すると[9]

$$\pi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\pi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}} \ , \quad \varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}} \tag{4.12}$$

ただし，実スカラーであることから

$$\varphi^*(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\varphi^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kx}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\varphi^*(-\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}} = \varphi(x) \tag{4.13}$$

なのでフーリエ変換は，(積分範囲も反転するので符号は出ない.)

$$\varphi^*(\mathbf{k}) = \varphi(-\mathbf{k}) \ , \quad \pi^*(\mathbf{k}) = \pi(-\mathbf{k}) \tag{4.14}$$

という関係を満たす．これをハミルトニアンに代入し，$\omega_\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ と書くと

$$H = \int d^3\mathbf{x}\ \mathcal{H} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\frac{1}{2}[|\pi(\mathbf{k})|^2 + \omega_\mathbf{k}^2|\varphi(\mathbf{k})|^2] \tag{4.15}$$

となる (問題参照)．これは $\omega_\mathbf{k}$ を角振動数とする調和振動子のあつまりと考えることができる．

$$\boxed{\text{自由場は調和振動子の集まりと思うことができる}}$$

問題　上のハミルトニアンの式 (4.15) を求めよ．

解答　ハミルトニアンにフーリエ変換の式を代入すると

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2(2\pi)^6}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2[\pi(\mathbf{k}_1)\pi(\mathbf{k}_2) + (-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2 + m^2)\varphi(\mathbf{k}_1)\varphi(\mathbf{k}_2)]e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}[\pi(\mathbf{k})\pi(-\mathbf{k}) + (\mathbf{k}^2 + m^2)\varphi(\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k})] \end{aligned} \tag{4.16}$$

を得る．さらに実スカラーの条件を考慮して，$\omega_\mathbf{k}$ の関係を使うとハミルトニアンを得る．

[9]以下フーリエ変換と元の関数は同じ記号を使い変数のみで区別する．

4.2.1 調和振動子の量子化（復習）

N 個の調和振動子のハミルトニアンは

$$H=\sum\frac{1}{2}(p_n^2+\omega_n^2q_n^2) \tag{4.17}$$

と表される．このとき

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(\omega_nq_n+ip_n) \tag{4.18}$$

とすると

$$[a_n,a_m^\dagger]=-i[q_n,p_m]=\delta_{mn} \tag{4.19}$$

と生成消滅演算子を与える．逆に解くと

$$q_n=\frac{1}{\sqrt{2\omega_n}}(a_n+a_n^\dagger)\quad,\quad p_n=-i\sqrt{\frac{\omega_n}{2}}(a_n-a_n^\dagger) \tag{4.20}$$

なので，ハミルトニアンは

$$H=\sum\frac{1}{2}\omega_n(a_na_n^\dagger+a_n^\dagger a_n)=\sum\omega_na_n^\dagger a_n+\frac{1}{2}\sum\omega_n \tag{4.21}$$

ハミルトニアンの最後の表式のように，消滅演算子が右に来るように演算子順序を決めた時現れる定数 $\frac{1}{2}\sum\omega_n$ は，真空 $|0\rangle$ で与えられる基底状態のエネルギーでゼロ点エネルギーでと呼ばれる．これは量子力学で不確定性のために位置と運動量の揺らぎをゼロにすることができないために生じるエネルギーである．

4.2.2 スカラー場の量子化

スカラー場の場合は，フーリエ係数として得られた $\pi(\mathbf{k}),\varphi(\mathbf{k})$ が複素量であることを考慮して

$$\varphi(\mathbf{k})=\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}(a_\mathbf{k}+a_{-\mathbf{k}}^\dagger)=\varphi^\dagger(-\mathbf{k}) \tag{4.22}$$

$$\pi(\mathbf{k})=-i\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{k}}{2}}(a_\mathbf{k}-a_{-\mathbf{k}}^\dagger)=\pi^\dagger(-\mathbf{k}) \tag{4.23}$$

と置く．これで，場が実になる条件は満たされている．量子化は，生成消滅演算子に

$$[a(\mathbf{k}),a^\dagger(\mathbf{k}')]=(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \tag{4.24}$$

の交換関係を置けばよい．

実際，場の量は

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x})&=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}(a_\mathbf{k}+a_{-\mathbf{k}}^\dagger)e^{i\mathbf{kx}}\\ \pi(\mathbf{x})&=-i\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{k}}{2}}(a_\mathbf{k}-a_{-\mathbf{k}}^\dagger)e^{i\mathbf{kx}}\end{aligned} \tag{4.25}$$

と書けるので，場の量の交換関係は

$$[\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = -i\int \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}}}(-[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{-\mathbf{k}'}] + [a^\dagger_{-\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}])e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}+i\mathbf{k}'\mathbf{x}'} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \quad (4.26)$$

のように正しくもとまる．

量子化されたハミルトニアンは，量子化された場の量を代入すると

$$H\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}}(a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}}]) \quad (4.27)$$

となる (問題参照)．ここで，第一項は真空に作用するとゼロになるように正規順序 (normal order) になっている．

正規順序積

正規順序積とは，演算子の積を生成消滅演算子で書いたときに，消滅演算子が生成演算子の右側に来るように並べ替えた積のこと．

$$: a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2} : \;=\; a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_2} \quad (4.28)$$

$$: a_{\mathbf{k}_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2}a^\dagger_{\mathbf{k}_3}a_{\mathbf{k}_4} : \;=\; a^\dagger_{\mathbf{k}_2}a^\dagger_{\mathbf{k}_3}a_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_4} \quad (4.29)$$

ここで，$:\cdots:$ は，場の積を生成消滅演算子で書いたときに正規順序を取れという記号である．

最後の項の交換関係は $\delta^3(0)$ という発散量を与える．これは，調和振動子のゼロ点エネルギーに相当するものであるが，場の理論においては無限個の自由度があるために無限大になってしまう．今の場合，体積が無限大のために発散しているのであり，この交換関係は全体を有限な箱の中に制限して考えると一応有限化できるが次に運動量について和を取るところでいずれにしろ発散が現れる．しかし，この量は単にエネルギーの原点を底上げしているだけなので重力を考えない限り引き去っても問題ない．いずれにしろ，観測されるのはエネルギーの変化だけである．

そこで，ハミルトニアンは正規順序になった部分だけを残してゼロ点エネルギーは落として次のように定義する．

スカラー場のハミルトニアン

$$H = \int d^3\mathbf{x} :\mathcal{H}: \;=\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\mathbf{k}}a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} \quad (4.30)$$

問題　量子化されたハミルトニアンが，(4.27) になることを示せ．

解答　量子化された場の量を代入すると

$$H \;=\; \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}+i\mathbf{k}'\mathbf{x}}\Big(-\frac{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}}{2}(a_{\mathbf{k}}-a^\dagger_{-\mathbf{k}})(a_{\mathbf{k}'}-a^\dagger_{-\mathbf{k}'})$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{-\mathbf{k}\mathbf{k}'+m^2}{2\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}}(a_\mathbf{k}+a^\dagger_{-\mathbf{k}})(a_{\mathbf{k}'}+a^\dagger_{-\mathbf{k}'})\Big) \\
=\ & \frac{1}{2}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_\mathbf{k}\Big(-\frac{1}{2}(a_\mathbf{k}-a^\dagger_{-\mathbf{k}})(a_{-\mathbf{k}}-a^\dagger_\mathbf{k})+\frac{1}{2}(a_\mathbf{k}+a^\dagger_{-\mathbf{k}})(a_{-\mathbf{k}}+a^\dagger_\mathbf{k})\Big) \\
=\ & \frac{1}{2}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_\mathbf{k}\Big(a_\mathbf{k}a^\dagger_\mathbf{k}+a^\dagger_{-\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}\Big) \\
=\ & \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_\mathbf{k}(a^\dagger_\mathbf{k}a_\mathbf{k}+\frac{1}{2}[a_\mathbf{k},a^\dagger_\mathbf{k}])
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

となる．

4.3 量子化された場と状態

4.3.1 Fock space と状態

調和振動子と同じように，場の理論においても真空を

$$a_\mathbf{k}|0\rangle = 0 \tag{4.32}$$

と定義する．真空は明らかにハミルトニアンの固有状態になっていて固有値はゼロである．つまりエネルギーがゼロの状態と解釈される．

その他の状態は

$$|\mathbf{k}\rangle \propto a^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle \tag{4.33}$$

のように，生成演算子をかけることによって作ることができる．

生成消滅演算子とハミルトニアンの交換関係をとると

$$[H, a_\mathbf{k}] = -\omega_\mathbf{k}a_\mathbf{k}\ ,\quad [H, a^\dagger_\mathbf{k}] = \omega_\mathbf{k}a^\dagger_\mathbf{k} \tag{4.34}$$

なので，エネルギーが E_ψ のある状態 $|\psi\rangle$ に生成消滅演算子をかけると

$$Ha^\dagger_\mathbf{k}|\psi\rangle = (E_\psi+\omega_\mathbf{k})a^\dagger_\mathbf{k}|\psi\rangle \tag{4.35}$$

なので，状態 $a^\dagger_\mathbf{k}|i\rangle$ はエネルギー $\omega_\mathbf{k}$ だけ励起した状態になっていることが分かる．このように，真空に生成消滅演算子を作用させて作られる状態を **Fock state** と呼び，その状態の作る空間を **Fock space** と呼ぶ．特に，

$$Ha^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle = \omega_\mathbf{k}a^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle \tag{4.36}$$

なので，$a^\dagger_\mathbf{k}|0\rangle$ はエネルギー $E_\mathbf{k}=\omega_\mathbf{k}$ の状態であることがわかる．

場の保存量として場のエネルギー運動量ベクトルを定義した．運動量は，ネーターの定理から

$$\mathbf{P} = -\int d^3\mathbf{x} : \pi\nabla\varphi : \tag{4.37}$$

と書ける．ここに，場の量子化の関係式を代入すると

$$\mathbf{P}=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathbf{k}a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \tag{4.38}$$

を得る．(問題参照) これにより，$a_{\mathbf{k}}^\dagger$ は運動量が $\mathbf{k}$ の状態を生成することがわかる．実際，状態 $|\mathbf{k}\rangle$ にこの演算子を状態に作用させると

$$\mathbf{P}a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle=\mathbf{k}a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle \tag{4.39}$$

なので，運動量の固有状態つまり平面波になっていることがわかる．このように生成消滅演算子 $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$ はそれぞれエネルギー運動量が $k^\mu=(\omega_{\mathbf{k}},\mathbf{k})$ の状態を生成消滅することが分かった.

問題　場の運動量の式 (4.38) を導け.

解答　ネーターの定理によって求めた場の運動量の定義に，量子化の式を代入すると，

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= -\int d^3\mathbf{x}:\pi\nabla\varphi: \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}+i\mathbf{k}'\mathbf{x}}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}}}\mathbf{k}'(a_{\mathbf{k}}-a_{-\mathbf{k}}^\dagger)(a_{\mathbf{k}'}+a_{-\mathbf{k}'}^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathbf{k}(a_{\mathbf{k}}-a_{-\mathbf{k}}^\dagger)(a_{-\mathbf{k}}+a_{\mathbf{k}}^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathbf{k}(a_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}-a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}+a_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^\dagger-a_{-\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}^\dagger)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

を得る．$\mathbf{k}$ の奇関数の積分になる部分はゼロなので落とすと

$$\mathbf{P}=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\mathbf{k}a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \tag{4.41}$$

を得る．この証明を見ると，運動量の定義に実は正規順序の記号を付ける必要はなかったことが分かる.

4.3.2　状態の規格化

$a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle$ が，運動量 $\mathbf{k}$ の状態に対応することは分かったが，規格化については不定性がある．最も便利な規格化は以下で定義するようにローレンツ変換の下での変換性を考慮することにより決めることができる.

そこで，規格化定数を $N_{\mathbf{k}}$ として

$$|\mathbf{k}\rangle=N_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle \tag{4.42}$$

と置く．生成消滅演算子の交換関係より

$$\langle\mathbf{k}'|\mathbf{k}\rangle=|N_{\mathbf{k}}|^2\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \tag{4.43}$$

である．規格化の条件としては

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = 1 \tag{4.44}$$

とする．

ここで，積分メジャーをローレンツ不変な形になるように取った．この積分がローレンツ不変であることは次の関係式から明らか：

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(2\pi)\theta(k^0)\delta(-k^2-m^2) \tag{4.45}$$

ここで $\theta(k^0)$ はステップ関数を表し，変数 k^0 が正の時に 1 で負ならば 0 の値を取る．

証明　k^0 についての積分を行うと左辺が出るが，このとき $k^0>0$ の条件はローレンツ不変な概念.

(4.43) を代入すると $N_{\mathbf{k}}^2 = 2\omega_{\mathbf{k}}$ が分かるので

規格化された状態

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}a_{\mathbf{k}}^{\dagger}|0\rangle \tag{4.46}$$

と定義する．

問題：k^0 積分を行い，eq.(4.45) の関係式を証明せよ．

4.3.3　量子化された場の解釈

場の理論はこのように Fock space 上で状態を表現する．このような状態は，次のようにして 1 粒子の量子力学的状態の相対論化に過ぎないことが分かる．真空の定義から

$$\varphi(\mathbf{x})|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}e^{-\mathbf{kx}}|\mathbf{k}\rangle \sim |\mathbf{x}\rangle \quad (nonrelativistic\ up\ to\ \omega_{\mathbf{k}}) \tag{4.47}$$

と位置の固有状態になっていると考えられるので，

$$\langle 0|\varphi(\mathbf{x})|\mathbf{k}\rangle = e^{i\mathbf{kx}} \sim \langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle \quad (nonrelativistic) \tag{4.48}$$

が，量子力学における平面波に対応していることが分かる．実際上の式は，$\varphi(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ の固有状態 $|\mathbf{x}\rangle$ を生成する演算子と考えられる．$\langle 0|\varphi(\mathbf{x})|\mathbf{k}\rangle$ は $\mathbf{x}$ 表示の 1 粒子の波動関数 $\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle$ と解釈できる．

問題　(4.48) を示せ．

4.4 ハイゼンベルグ描像

これまでの議論では，場の演算子に時間が入ってこない．これは前節の正準量子化を行ったときに，場の量が時間によらないシュレディンガー描像の量子化を取ったからである．量子化の段階で時間発展を演算子の発展として見るか，状態の発展として見るかは自由だが，場の理論ではこのように理論の時間依存性だけ分離することは相対論的な不変性の見通しが悪くなる．よって，相対論的共変性を保ちながら量子論を展開するには，場の演算子が時間依存性を持つハイゼンベルグ描像の方が良い．

ハイゼンベルグ描像に移るには

$$\varphi(x) = e^{iHt}\varphi(\mathbf{x})e^{-iHt} \tag{4.49}$$

とする．これによって時間に依った場の演算子が定義される．(ここでは，ハイゼンベルグ表示とシュレディンガー表示は変数の $\mathbf{x}$(3 次元ベクトル) と x(4 元ベクトル) とで区別する)．

この変換を生成消滅演算子に行うと

$$e^{iHt}a_{\mathbf{k}}e^{-iHt} = a_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\ ,\quad e^{iHt}a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{-iHt} = a_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \tag{4.50}$$

なので，場の量は

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} + a^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t})e^{i\mathbf{kx}} \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{kx}} + a^\dagger_{-\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{kx}}) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k}}e^{i(-\omega_{\mathbf{k}}t+\mathbf{kx})} + a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{kx})})
\end{aligned} \tag{4.51}$$

のように変換される．(最後の式変形では， 2 項目の積分変数 k の符号を逆にした.）同様に，共役運動量密度も求めることができる．結果，ハイゼンベルグ描像での量子場は

ハイゼンベルグ描像の量子場

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}(a_{\mathbf{k}}e^{i(-\omega_{\mathbf{k}}t+\mathbf{kx})} + a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{kx})}) \tag{4.52}$$

$$\pi(x) = -i\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}}(a_{\mathbf{k}}e^{i(-\omega_{\mathbf{k}}t+\mathbf{kx})} - a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t-\mathbf{kx})}) \tag{4.53}$$

と書ける．

4.4.1 量子化された場の方程式

このようなハイゼンベルグ描像では，

量子場の方程式

量子化された場の量はクライン・ゴルドン方程式

$$(\partial^2 - m^2)\varphi(x) = 0 \tag{4.54}$$

を満たす．

ハイゼンベルグの運動方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H] \tag{4.55}$$

である．これを，場の量に適用すると

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x) = [\varphi(x), H] &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}(\omega_\mathbf{k} a_\mathbf{k} e^{i(-\omega_\mathbf{k}t+\mathbf{kx})} - \omega_\mathbf{k} a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{kx})}) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_\mathbf{k}}{2}}(a_\mathbf{k} e^{i(-\omega_\mathbf{k}t+\mathbf{kx})} - a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{kx})}) \\ &= i\pi(x) \end{aligned} \tag{4.56}$$

同様に共役運動量の時間発展は

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = [\pi(x), H] &= -i\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\omega_\mathbf{k}^2(a_\mathbf{k} e^{i(-\omega_\mathbf{k}t+\mathbf{kx})} + a_\mathbf{k}^\dagger e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{kx})}) \\ &= -i(-\nabla^2 + m^2)\varphi(x) \end{aligned} \tag{4.57}$$

で与えられる．これらを組み合わせると

$$i\frac{\partial}{\partial t}(i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x)) = i\frac{\partial}{\partial t}([\varphi(x), H]) = i\frac{\partial}{\partial t}(i\pi(x)) = i[\pi(x), H] = (-\nabla^2 + m^2)\varphi(x) \tag{4.58}$$

となる．よって

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2)\varphi(x) = 0 \tag{4.59}$$

が成り立ち，確かに量子化された場の量 $\varphi(x)$ はクライン・ゴルドン方程式を満たすことがわかる．

非相対論的な量子力学では，波動関数の満たすべき方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi \tag{4.60}$$

であり，もしエネルギー $E > 0$ の固有状態であれば

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{x}, t) = E\Psi(\mathbf{x}, t) \to \Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})e^{-iEt} \tag{4.61}$$

が場の時間依存性を表す．一方，クライン・ゴルドン方程式は時間の 2 階微分を含むので，時間依存性が e^{iEt} の解も考えなくてはならない．習慣に従って e^{-iEt} を正のエネルギー (振動) 解，e^{iEt} を負のエネルギー解と呼ぶ．(positive/negative energy(frequency) solution)

量子力学の段階では，負のエネルギー状態が出現するとその系は不安定になってしまうわけだが，ここまでの議論から相対論的場の量子論においてはそれがうまく回避されていることがわかる．

問題　ハイゼンベルグ描像の正準共役運動量が満たす方程式を求めよ．

4.5　因果律と交換子

量子化された場の量の解釈についてと同様の議論で，ハイゼンベルグ描像の場 $\varphi(x)$ は x^μ で定まる時空の１点で粒子の生成消滅を行うと解釈できる．そこで，

$$\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \tag{4.62}$$

は x^μ と y^μ で指定される時空の２点でそれぞれ粒子の生成消滅を行うと考えられる．

このような事象を考えた時，もし点 x と y が空間的に離れていれば，お互いに何ら影響を及ぼさないはずである．これを場の理論における**因果律**と呼ぶ．その結果，演算子 $\varphi(x)$ と $\varphi(y)$ を状態ベクトルに作用させる順序に依らないはずなので，ハイゼンベルグ描像の場は次のような条件を満たさなければならない．

場の量子論の因果律

もし $\Delta^\mu = x^\mu - y^\mu$ が空間的ならば

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \tag{4.63}$$

である．

ハイゼンベルグ描像の量子場も eq.(4.52) のように生成消滅演算子を使って展開されているので，生成消滅演算子の交換子を使えば，異なる時刻の場の量の交換関係を計算することができる．

$$\begin{aligned}
[\varphi(x), \varphi(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}} [(a_\mathbf{k} e^{ik\cdot x} + a_\mathbf{k}^\dagger e^{-ik\cdot x}), (a_{\mathbf{k}'} e^{ik'\cdot y} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-ik'\cdot y})] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(e^{ik\cdot(x-y)} - e^{-ik\cdot(x-y)}) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}} (e^{ik\cdot(x-y)} - e^{-ik\cdot(x-y)})|_{k^0=\omega_\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

ここで，積分メジャーがローレンツ不変な形をしていることが以前に示した次の関係式

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)\theta(k^0)\delta(-k^2 - m^2) \tag{4.65}$$

から分かる．よって，

$$D(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}} e^{ik\cdot(x-y)} \tag{4.66}$$

とすると，$D(x-y)$ はローレンツ変換に関して不変である．さらに，交換関係は

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = D(x-y) - D(y-x) \tag{4.67}$$

と書ける．すると，次のようにして場の量子論における因果律が成り立っていることが証明できる．

今，$(x-y)^2 > 0$ つまり 2 点が空間的とする．このとき，$(x-y)$ と $(y-x)$ をつなぐローレンツ変換が存在する．一方 $D(x-y)$ はローレンツ変換に関して不変なので，その変換を行うことで $D(x-y) = D(y-x)$ が結論される．よって，$x-y$ が空間的ならば

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = D(x-y) - D(y-x) = 0 \quad x-y \text{ が空間的} \tag{4.68}$$

である．このように，正準量子化により得られた量子場は，粒子の生成消滅の相対的な関係が空間的であれば互いに影響を及ぼすことが無く，場の量子論での因果律が成り立っている．

4.5.1 プロパゲータ

遅延プロパゲータ

次の関数は，

$$D_{ret}(x-y) = \theta(x^0 - y^0)[\varphi(x), \varphi(y)] \tag{4.69}$$

$$(\partial^2 - m^2)D_{ret}(x-y) = i\delta^4(x-y) \tag{4.70}$$

を満たす．これを遅延伝搬関数または**遅延プロパゲータ**とよぶ．

この量の積分表示を求めることによって，このことを証明する．そこで，ステップ関数を考慮するために，次のような複素積分を考える：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{i}{(k^0)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} e^{-ik^0(x^0-y^0)} &= \int_{C_R} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{ie^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-\omega_{\mathbf{k}})(k^0+\omega_{\mathbf{k}})} \\ &= \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{2\omega_{\mathbf{k}}}|_{k_0=\omega_{\mathbf{k}}} + \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)}}{-2\omega_{\mathbf{k}}}|_{k^0=-\omega_{\mathbf{k}}}\end{aligned} \tag{4.71}$$

積分路 C_R は実軸にそってであるが，$x^0 < y^0$ の時に 0 になるという境界条件から，pole は積分路の下にあるとする．すると $x^0 < y^0$ のとき，k^0 空間の上半面の十分大きな $|k^0|$ での寄与は 0 になるので，積分路を閉じることができ，pole が無いので留数定理より 0 になる．一方，$x_0 - y_0 > 0$ の場合は，下半円で積分経路を閉じることになる．結果として得られた積分路 $C_\pm$ は両方の pole を含む時計回り（マイナスがでる）の積分路である．すると，留数の寄与を計算すると

$$\begin{aligned}D_{ret}(x-y) &= \int_{x^0>y^0} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^0)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} e^{ik(x-y)} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \oint_{C_\pm} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{ie^{-ik^0(x^0-y^0)+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{(k^0-\omega_{\mathbf{k}})(k^0+\omega_{\mathbf{k}})} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\omega_{\mathbf{k}}}|_{k_0=\omega_{\mathbf{k}}} + \frac{e^{-ik^0(x^0-y^0)+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{-2\omega_{\mathbf{k}}}|_{k^0=-\omega_{\mathbf{k}}}\right)\end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(e^{ik\cdot(x-y)} - e^{-ik\cdot(x-y)})|_{k^0=\omega_{\mathbf{k}}} \tag{4.72}$$

を得る．

ローレンツ不変な形でこの積分表示を書いておくと，

$$D_{ret}(x-y) = \int_{C_R}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2-m^2}e^{ik(x-y)} \quad \left[= \int_{C_R}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2}e^{-ip(x-y)}\right]_{P-S} \tag{4.73}$$

ただし，k^0 の積分路は実軸の少し上を $(-\infty,\infty)$ の区間で積分する．

この式より，クライン・ゴルドン方程式の微分作用素を作用させると

$$(\partial^2 - m^2)D_{ret}(x-y) = \int_{C_R}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}ie^{ik(x-y)} = i\delta^4(x-y) \tag{4.74}$$

となる．よって，D_{ret} はクライン・ゴルドン方程式のプロパゲータ（グリーン関数）になっている．

この複素積分による表示から分かるように，pole の避け方によって４種類のプロパゲータが考えられる．場の理論で最も有用なのは，次に議論する時間順序積に対応したプロパゲータ：

$$D_F(x-y) = \int_{C_F}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2-m^2}e^{ik(x-y)} = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2-m^2+i\epsilon}e^{ik(x-y)} \tag{4.75}$$

である．ここで，最後の $i\epsilon$ は，pole が $(k^0)^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2 - i\epsilon$ にあることを意味している．これは,pole が $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} - i\epsilon$ と $k^0 = -\omega_{\mathbf{k}} + i\epsilon$ にあると思って積分路を実軸に取ることを意味し，結果として C_F の pole の避け方を指定している．

4.6 時間順序積とプロパゲ-タ

4.6.1 ファインマン伝搬関数と Schwinger-Dyson 方程式

場の理論では場の量の積の真空期待値，または correlation function 相関関数と呼ばれる

$$\sigma = \langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle \tag{4.76}$$

が非常に重要な役割を果たす.

ここで，T は時間順序積 (time ordered product) と呼ばれる．積で場を時間の流れに従って右から掛けて得られるもので，例えば２点関数は次のように書くことができる．

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle \tag{4.77}$$

一般に，時間順序積の真空期待値の満たす方程式を Schwinger-Dyson 方程式と呼ぶ．時間順序２点関数は,

$$\boxed{(\partial^2 - m^2)\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}\rangle = i\delta^4(x-y) \qquad (4.78)}$$

を満たす．これが 2 点関数に関する Schwinger-Dyson 方程式で，クライン・ゴルドン方程式にデルタ関数的ソース項のある方程式になっている．右辺は **Contact term** と呼ばれる．

これは，クライン・ゴルドンの演算子を作用させることで証明できる．時間微分が

$$\partial_t\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\dot{\varphi}(x)\varphi(y)|0\rangle + \theta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\dot{\varphi}(x)|0\rangle \qquad (4.79)$$

となることに注意して，残りの微分を実行することにより

$$\begin{aligned}(\partial^2 - m^2)\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle &= -\delta(x^0-y^0)\langle 0|\pi_\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle + \delta(y^0-x^0)\langle 0|\varphi(y)\pi_\varphi(x)|0\rangle \\ &= \delta(x^0-y^0)\langle 0|[\varphi(y),\pi_\varphi(x)]|0\rangle \\ &= i\delta(x^0-y^0)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \qquad (4.80)\end{aligned}$$

ここで，ステップ関数 θ に微分のかからない場合は，場 φ がクライン・ゴルドン方程式を満たすことより 0 になることを使った．よって，時間順序 2 点関数は (4.78) を満たす．

この 2 点の相関関数は伝搬関数の一種で，やはり積分表示ができる．時間順序積の定義に相当する境界条件を満たす，伝搬関数は

$$\boxed{\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2-m^2+i\epsilon}e^{ik(x-y)} \qquad (4.81)}$$

であることが分かる．これを，**ファインマン・プロパゲータ**,(ファインマン伝搬関数,Feynmann propagator,) と呼ぶ．

問題

$$\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle = D(x-y) \qquad (4.82)$$

であることを示し，そのことを使って $\langle T\varphi(x)\varphi(y)\rangle$ の積分表示がファインマンプロパゲータに一致することを証明せよ．

4.7 複素スカラー場

4.7.1 複素スカラー場の量子化

複素スカラー場は，対称な 2 個の実スカラー場と同等であることを見たがネーターの定理から電荷を持つことが分かるのでその量子化は，電荷の性質を反映したものになる．電荷の扱いは以下の議論で本質的であるのでその点に注意しながら複素スカラー場の量子化を見ていこう．

それぞれ共役な場の量は，実スカラーとの関係を見ると

$$\phi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2} \tag{4.83}$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\bar{\phi}} = (\pi_{\varphi_1} - i\pi_{\varphi_2})/\sqrt{2} \tag{4.84}$$

である．実際これによってポアッソン括弧を計算すると

$$\{\phi, \pi_\phi\} = \frac{1}{2}(\{\varphi_1, \pi_{\varphi_1}\} + \{\varphi_2, \pi_{\varphi_2}\}) = i\delta^3 \tag{4.85}$$

のように確かに互いに共役であることが分かる．

そこで，実スカラー場の生成消滅演算子による展開を使うと

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\left(\frac{a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}e^{i(-\omega_\mathbf{k}t+\mathbf{kx})} + \frac{a^\dagger_{1\mathbf{k}} + ia^\dagger_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{kx})}\right) \\ \bar{\phi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\left(\frac{a_{1\mathbf{k}} - ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}e^{i(-\omega_\mathbf{k}t+\mathbf{kx})} + \frac{a^\dagger_{1\mathbf{k}} - ia^\dagger_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{kx})}\right) \end{aligned} \tag{4.86}$$

となる．ここで，複素スカラー場の生成消滅演算子を

$$a_\mathbf{k} = \frac{a_{1\mathbf{k}} + ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}, \bar{a}_\mathbf{k} = \frac{a_{1\mathbf{k}} - ia_{2\mathbf{k}}}{\sqrt{2}} \tag{4.87}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}(a_\mathbf{k}e^{ik\cdot x} + \bar{a}^\dagger_\mathbf{k}e^{-ik\cdot x}) \\ \bar{\phi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}(\bar{a}_\mathbf{k}e^{ik\cdot x} + a^\dagger_\mathbf{k}e^{-ik\cdot x}) \end{aligned} \tag{4.88}$$

と量子場の展開が定義されることがわかる．この展開は

$$\phi^\dagger = \bar{\phi} \tag{4.89}$$

なので，量子化によって複素共役の関係がエルミート共役に置き換わっている．これらの生成消滅演算子の交換関係は

$$[a_\mathbf{k}, a^\dagger_{\mathbf{k}'}] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\ ,\ \ [\bar{a}_\mathbf{k}, \bar{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{4.90}$$

である．そこで，場 ϕ の作る粒子を消滅するのは $\bar{\phi}$ であることが分かる．このことは，電荷についてみるとよく分かる．

そこで，複素スカラー場の 2 点関数は ϕ と $\bar{\phi}$ を含む場合に値を持つ．とくに，時間順序積は

$$\langle 0|T\{\phi(x)\bar{\phi}(y)\}|0\rangle \tag{4.91}$$

で与えられる．この積は，$x^0 > y^0$ で

$$\langle 0|T\{\phi(x)\bar{\phi}(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\langle 0|(a_\mathbf{k}e^{ik\cdot x} + \bar{a}_\mathbf{k}^\dagger e^{-ik\cdot x})(\bar{a}_{\mathbf{k}'}e^{ik'\cdot y} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{-ik'\cdot y})|0\rangle \tag{4.92}$$

なので，ステップ関数 θ を使ってまとめると，

$$\langle 0|T\{\phi(x)\bar{\phi}(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}(e^{ik\cdot(x-y)}\theta(x^0-y^0) + e^{ik\cdot(y-x)}\theta(y^0-x^0)) = D_F(x-y) \tag{4.93}$$

以上では，ハイゼンベルグ表示の場を書いているが，シュレディンガー表示に移るには $t=0$ とすればよい．同様にして正準形式の場も求まる．

$$\pi(\mathbf{x}) = \dot{\bar{\phi}}(x)|_{t=0}\ ,\quad \bar{\pi}(\mathbf{x}) = \dot{\phi}(x)|_{t=0} \tag{4.94}$$

また，同時刻交換関係は

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi_\phi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ ,\quad [\bar{\phi}(\mathbf{x}), \bar{\pi}_\phi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{4.95}$$

に成っていることが分かる．

ハミルトニアンは

$$H = \int d^3\mathbf{x} : (\bar{\pi}_\phi\pi_\phi + \nabla\bar{\phi}\nabla\phi + m^2\bar{\phi}\phi) : \ = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\omega_\mathbf{k}(a_\mathbf{k}^\dagger a_\mathbf{k} + \bar{a}_\mathbf{k}^\dagger\bar{a}_\mathbf{k}) \tag{4.96}$$

4.7.2 複素スカラー場の保存電荷

場の古典的な議論の時に，ネーターの定理の例として紹介したように，複素スカラー場の作用は位相変換に関して不変である．この対称性に伴うネーターの保存量は，電荷と解釈することができる．

以前に求めた，ネーター流の結果から，保存電荷 Q は

$$Q = \int d^3\mathbf{x} : (\bar{\pi}_\phi\bar{\phi} - \pi_\phi\phi) : \tag{4.97}$$

で与えられる．ただし，量子化した電荷は古典的なネーターの電荷の正規順序積を取ったものとして定義している．生成消滅演算子を使った式を求めると

$$Q = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}(a_\mathbf{k}^\dagger a_\mathbf{k} - \bar{a}_\mathbf{k}^\dagger\bar{a}_\mathbf{k}) = N - \bar{N} \tag{4.98}$$

で与えられる．ただし，N,$\bar{N}$ はそれぞれ $\mathbf{a_k}$ と $\bar{\mathbf{a}}_\mathbf{k}$ の個数演算子で

$$N = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}a_\mathbf{k}^\dagger a_\mathbf{k}\ \ ,\quad \bar{N} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\bar{a}_\mathbf{k}^\dagger\bar{a}_\mathbf{k} \tag{4.99}$$

である．

これによって，Q を電荷と解釈すると $a_{\mathbf{k}}^\dagger$, 及び $\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ で生成される状態は符号の違う電荷を持つことが分かる．このように，複素スカラー場は粒子があると，それと質量が同じで電荷が逆符号の粒子の存在を予言する．このような粒子を**反粒子**と呼ぶ．

一方，場の量と電荷の交換関係を見ると

$$[Q,\phi] = -\phi\ ,\quad [Q,\bar{\phi}] = \bar{\phi} \tag{4.100}$$

となっていることが分かる．これは，場の量 ϕ または $\bar{\phi}$ それぞれは電荷の保存を満たすような効果を持っていることを表している．つまり，ϕ は粒子を消すか反粒子を作るかで電荷の変化は -1 であり，$\bar{\phi}$ は反粒子を消すか粒子を作るかで電荷の変化は $+1$ である．

問題

1. 量子化された保存電荷 Q の式 (4.98) を導け．

2. 場の量と電荷の交換関係 (4.100) を導け．

解答

1. 保存電荷の定義式に，量子化された場の量を代入すると

$$\begin{aligned}
Q &= \int d^3\mathbf{x} : (\bar{\pi}_\phi\bar{\phi} - \pi_\phi\phi) : \\
&= i\int d^3\mathbf{x}\frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}}[-i(a_{\mathbf{k}} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)(\bar{a}_{\mathbf{k}'} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger) - (-i)(\bar{a}_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger)(a_{\mathbf{k}'} + \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger)] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}[(a_{\mathbf{k}} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)(\bar{a}_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger) - (\bar{a}_{\mathbf{k}} - a_{\mathbf{k}}^\dagger)(a_{\mathbf{k}} + \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger)] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\bar{a}_{\mathbf{k}}) = N - \bar{N} \qquad (4.101)
\end{aligned}$$

を得る．

2. 最後の関係式は個数演算子との交換関係から明らか．