6 場の相互作用

◁ ▷

ここまで場の量子化を行ってきたが，これらの間には相互作用がないのでいわゆる自由場の理論を構築してきたに過ぎない．実際の現象は，粒子と粒子の反応として記述されるので次の，そのような粒子間の相互作用を導入する必要がある．

6.0.1 摂動展開と相互作用表示

このような場の相互作用は，ラグランジアンに高次の項や異なる場との積の項で記述できる．

例えば，ボゾンとフェルミオンの相互作用は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi) + \mathcal{L}(Dirac) + \mathcal{L}_{int} \tag{6.121}$$

$$\mathcal{L}_{int} = -f\varphi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{6.122}$$

を加えることで得られる[21]．実際，運動方程式を作ってみると

$$\begin{aligned} (\partial^2 - m^2)\varphi(x) &= f\bar{\psi}(x)\psi(x) \\ (\not{\partial} - m)\psi(x) &= f\varphi(x)\psi(x) \end{aligned} \tag{6.123}$$

のようになる．直感的には最初の方程式はフェルミオンが φ のソースになっているという式，また 2 番目の式はボゾン φ がフェルミオンに吸収されて新しい ψ ができると考えられる．これをもう少し正確に場の理論で表現するのがこの章の目的である．

6.1 2 点関数の摂動展開

6.1.1 相互作用表示の場

ここでは例として，φ^4-理論を取り上げる．φ^4-理論の作用は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{6.124}$$

ハミルトニアンは

$$H = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H}(\lambda = 0) + \int d^3\mathbf{x}\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 = H_0 + H_{int} \tag{6.125}$$

で与えられる．

ハミルトニアンが与えられると，ハイゼンベルグ方程式を書くことはできる．

$$i\frac{d}{dt}\varphi(x) = [\varphi(x), H] \tag{6.126}$$

[21] フェルミオンとボソンの間のこのようなタイプの相互作用を湯川相互作用と呼ぶ．

しかし，このハミルトニアンが場の２次以上を含んでいると，様々な問題が生じる．この方程式は相対論的に共変でないので，相対論的に共変な形のいわゆる朝永・シュヴィンガー方程式

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma_t}\varphi(x) = [\varphi(x), \mathcal{H}(\sigma_t)] \tag{6.127}$$

を場の理論の基本方程式として書くことができる．ここで，σ_t は空間的３次元超平面を表し，$\delta\sigma_t$ はその超平面の変分を表す．しかし，相対論的になったとしても，実際に何かを計算しようとすると，様々な疑問が生じる．

考えられる問題点：

1. まず最初に，前節で行った生成消滅演算子による量子化と同様のことができるのかどうかすら問題になる．＞場の量が定義されていない．
2. すると，正規順序（normal ordering）も，交換関係の意味すら定まっていない．＞場の積が定義されていない．
3. ハミルトニアンすら，発散しているかもしれない．＞ハミルトニアンが定義されていない．
4. 状態も定義されていない．

つまり，ハイゼンベルグ方程式や朝永・シュヴィンガー方程式を書いても，そのそれぞれの記号がまったく定義されていない．

そこで，自由場の量子化の知識を使って，相互作用の影響を逐次取り込んでいこうとするのが，以下で紹介する**相互作用表示**である．この構成法では，相互作用がない場合の場の量を使って，相互作用のある場合の場の量を表す．これは，ある種のユニタリー変換を使って

$$\varphi(x) = U^\dagger \varphi_I(x) U \tag{6.128}$$

のように与えられる．ただし，φ_I は相互作用表示 (Interaction) の場の意味で，右辺は全て自由場の量子化によって定義されている．このようにすれば，場の積や交換関係，状態など，必要な事項が定義できる．ただし，近似を上げると常に上の定義は書き換えられるので，それぞれ再定義されることになる．この操作は一般に発散を含み，繰り込みなどの操作でそれらを取り除くことになる．以下ではこの変換を求めていく．

6.2 相互作用表示

相互作用があっても，ある時刻 t_0 での場は自由場と同様に生成消滅演算子を使って

$$\varphi(t_0, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}(a_\mathbf{k} + a^\dagger_{-\mathbf{k}})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{6.129}$$

と展開できる．すると，一般の時刻 t のハイゼンベルグ表示の場は

$$\varphi(x) = e^{iH(t-t_0)}\varphi(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \tag{6.130}$$

で定義されることになる．この場と自由場として発展してきた

$$\varphi_I(x) = e^{iH_0(t-t_0)}\varphi(\mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{6.131}$$

場との関係は

$$\varphi(x) = e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\varphi_I(x)e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} = U^\dagger(t,t_0)\varphi_I(x)U(t,t_0) \tag{6.132}$$

よって

場の相互作用表示

ハミルトニアン $H = H_0 + H_I$ が与えられたとき，ハイゼンベルグ表示の場は自由場から

$$\varphi(x) = U^\dagger(t,t_0)\varphi_I(x)U(t,t_0) \tag{6.133}$$

というユニタリー変換で得られる．ただし

$$U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \tag{6.134}$$

この $U(t,t_0)$ の満たす方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) &= -ie^{iH_0(t-t_0)}(H-H_0)e^{-iH(t-t_0)} \\ &= -ie^{iH_0(t-t_0)}(H_{int})e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &= -iH_I(t)U(t,t_0)\end{aligned} \tag{6.135}$$

たとえば，

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)}(H_{int})e^{-iH_0(t-t_0)} = \int d^3\mathbf{x}\frac{\lambda}{4!}\varphi_I^4(\mathbf{x}) \tag{6.136}$$

この方程式の級数解は微分方程式を,$U(t_0,t_0) = 1$ を境界条件を考慮して

$$U(t,t_0) - 1 = -i\int_{t_0}^{t} H_I(t)U(t,t_0) \tag{6.137}$$

という積分方程式に書き換えておいて，逐次近似すると

$$U(t,t_0) = 1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2) + \cdots \tag{6.138}$$

ここで，積分区間はそれぞれ左にある $H_I(t)$ の時間を越すことができない．つまり，$H(t)$ は時間の順序に並んでいる．そこで，場の時間順序積を使うことにより，この積分区間への制限を取り払うことができる．

$$\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)\cdots H_I(t_n) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\cdots dt_n T\{H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)\} \tag{6.139}$$

この表示を使うと $U(t,t_0)$ はまとまって

$$U(t,t_0) = T\, e^{-i\int_{t_0}^{t} dt H_I(t)} \tag{6.140}$$

と書ける (ダイソン展開 Dyson's expansion, Dyson Series)．T は指数を展開したときの各項を時間順序積で定義することを表す.

6.2.1 相互作用があるときの真空と相関関数

次に相互作用表示における真空の定義を与える．真空の定義は全ハミルトニアン H の基底状態として定義される．その状態を $|\Omega\rangle$ とする．$|\Omega\rangle$ は，H_0 の真空 $|0\rangle$ から出発して十分長い時間時間発展させれば得られるであろう．そこで，ハイゼンベルグピクチャーの真空を，H_0 の真空をレファレンス時刻の t_0(以下では $t_0 = 0$ とする.) まで十分時間をかけて発展させて作る.

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-iHT}|0\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-iHT} e^{iH_0T}|0\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} U(0,-T)|0\rangle \tag{6.141}$$

ただし，T は十分大きく取るとする．また 2 番目の式変形では $H_0|0\rangle = 0$ を使った．さらに最低エネルギーだけを取り出すために $T(1-i\epsilon)$ と考える．真空のエネルギーを $E_0 = \langle\Omega|H|\Omega\rangle$ とすると，規格化条件から

$$\langle\Omega|\Omega\rangle = \frac{1}{|\mathcal{N}|^2}\langle 0|U^\dagger(0,-T)U(0,-T)|0\rangle = 1 \tag{6.142}$$

より

$$|\mathcal{N}|^2 = \langle 0|U(T,-T)|0\rangle \tag{6.143}$$

そこで，$x^0 > y^0$ とすると

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\varphi(x)\varphi(y)|\Omega\rangle \\
&= \frac{\langle 0|U^\dagger(0,-T)U^\dagger(x_0,0)\varphi_I(x)U(x^0,0)U^\dagger(y^0,0)\varphi_I(y)U(y^0,0)U(0,-T)|0\rangle}{|\mathcal{N}|^2} \\
&= \frac{\langle 0|U(T,x_0)\varphi_I(x)U(x^0,y^0)\varphi_I(y)U(y^0,-T)|0\rangle}{\langle 0|U(T,-T)|0\rangle}
\end{aligned} \tag{6.144}$$

よって

$$\langle\Omega|T\{\varphi(x)\varphi(y)\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\varphi_I(x)\varphi_I(y)e^{-i\int_{-T}^{T} dtH_I}\}|0\rangle}{\langle 0|e^{-i\int_{-T}^{T} dtH_I}|0\rangle} \tag{6.145}$$

我々が計算するべき相関関数は

$$\langle\Omega|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\cdots\varphi_I(x_n)e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dtH_I}\}|0\rangle}{\langle 0|e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} dtH_I}|0\rangle} \tag{6.146}$$

6.2.2 まとめ

相互作用表示についてまとめておこう．相互作用表示を定義するために，あるレファレンス時刻 t_0 での場が自由場と同じようにフーリエ展開できると仮定し，その時間発展を自由場の発展と比較することで，その違いとして相互作用の効果をとりいれるものである．ここでは，レファレンス時刻を最初から $t_0 = 0$ としておく．

相互作用表示

本来の場と相互作用表示の場は，形式的に $t = 0$ での場の展開 $\varphi(\mathbf{x})$ を与えると，それぞれのハミルトニアンによって発展するので

$$\varphi(x) = e^{iHt}\varphi(\mathbf{x})e^{-iHt} \quad , \quad \varphi_I(x) = e^{iH_0t}\varphi(\mathbf{x})e^{-iH_0t} \tag{6.147}$$

よって，ある時刻 $t = x^0$ における，二つの場の関係は

$$\varphi(x) = U^\dagger(x^0, 0)\varphi_I(x)U(x^0, 0) \tag{6.148}$$

ここで,$U(t, 0)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}U = -iH_I(t)U \quad \text{where} \quad H_I = U^\dagger(H - H_0)U = H(\varphi_I; t) \tag{6.149}$$

ただし,$U(0, 0) = 1$ 積分方程式に書き換えると

$$U(t, 0) = 1 - i\int_0^t H_I(t)U(t, 0) \tag{6.150}$$

これを逐次近似で解くと

$$U(t, 0) = Te^{-i\int_0^t H_I(t)dt} \tag{6.151}$$

一方，真空は

$$|\Omega\rangle = e^{-iH_IT}|0\rangle = e^{-iH_IT}e^{iH_0T}|0\rangle = \frac{1}{N}U(0, -T)|0\rangle \tag{6.152}$$

ただし，規格化定数は

$$\langle\Omega|\Omega\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{N}|^2 = \langle 0|U(T, -T)|0\rangle \tag{6.153}$$

そこで，correlation function はそれぞれを代入すると

$$\langle\Omega|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\cdots\varphi_I(x_n)e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I}\}|0\rangle}{\langle 0|e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I}|0\rangle} \tag{6.154}$$

と書ける．

6.2.3 Wick の定理

さて，問題は多くの場の量の時間順序積を計算することに帰着された．摂動論においては，これらの時間順序積はプロパゲータを使って積分に書き換えていくことができる．以下では，場は全て相互作用表示の場として φ_I の添え字 I は書かない．

まず我々が計算したいのは，場の積の真空期待値（correlation function）なので，正規順序積に書き換えるのが良い．このプロセスで重要な役割を果たすのがここで説明する Wick の定理である．

Wick の定理を導くために，場の量を正振動 φ^+ と負振動 φ^- の部分に分ける．

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x) \tag{6.155}$$

これは，ようするに，生成演算子と消滅演算子の部分に分けたことになる．

$$\varphi_+(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\omega_\mathbf{k}}} a_\mathbf{k} e^{ik\cdot x} \quad , \quad \varphi_-(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\omega_\mathbf{k}}} a_\mathbf{k}^\dagger e^{-ik\cdot x} \tag{6.156}$$

交換関係を，比べることで次のようなことが分かる．

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= [\varphi_+(x), \varphi_-(y)] + [\varphi_-(x), \varphi_+(y)] \\ &= D(x-y) - D(y-x) \end{aligned} \tag{6.157}$$

そこで，例えば時間順序積は，$x^0 > y^0$ のとき，場の順序を決めて T 積を外すと，

$$T\{\varphi(x)\varphi(y)\} = \varphi(x)\varphi(y) = (\varphi^+(x) + \varphi^-(x))(\varphi^+(y) + \varphi^-(y)) \tag{6.158}$$

この積を正規順序にするために必要なのは，$\varphi^+(x)$ を右に持っていくことだけである．実際，$x^0 > y^0$ のとき，場の積と正規順序積の差は

$$\begin{aligned} \overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) &= \varphi(x)\varphi(y) - :\varphi(x)\varphi(y): \\ &= (\varphi^+(x) + \varphi^-(x))(\varphi^+(y) + \varphi^-(y)) - :\varphi(x)\varphi(y): \\ &= [\varphi^+(x), \varphi^-(y)] \end{aligned} \tag{6.159}$$

である．ここで，$\overbrace{\varphi\varphi}$ という記号は，縮約 (contraction) と呼ばれ，T 積と正規順序積の差を表す．よって

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = T\{\varphi(x)\varphi(y)\} - :\varphi(x)\varphi(y): \begin{cases} [\varphi^+(x), \varphi^-(y)] = D(x-y) & x^0 > y^0 \\ [\varphi^+(y), \varphi^-(x)] = D(y-x) & y^0 > x^0 \end{cases} \tag{6.160}$$

この右辺はファインマン・プロパゲータに他ならない．よって

$$\overbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = D_F(x-y) \tag{6.161}$$

であり

時間順序積と正規順序積

$$T\{\varphi(x)\varphi(y)\} =: \varphi(x)\varphi(y) : + D_F(x-y) \tag{6.162}$$

次に，３個の場合を考えよう．仮に $\varphi(z)$ が $z^0 > x^0, y^0$ とすると

$$\begin{aligned} T\{\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\} &= \varphi(z)T\{\varphi(x)\varphi(y)\} \\ &= \varphi(z)(:\varphi(x)\varphi(y): + \overbracket{\varphi(x)\varphi}(y)) \\ &= :\varphi(z)\varphi(x)\varphi(y): + :\overbracket{\varphi(z)\varphi}(x)\varphi(y): \\ &\quad + :\varphi(x)\overbracket{\varphi(z)\varphi}(y): + \overbracket{\varphi(x)\varphi}(y)\varphi(z) \end{aligned} \tag{6.163}$$

帰納法的に n この積が分かれば $n+1$ 個目も同様にして求めることができる．よって

Wick の定理

$$\begin{aligned} T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\} &= N\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) + \overbracket{\varphi(x_1)\varphi}(x_2)\cdots\varphi(x_n) + \cdots \\ &\quad \overbracket{\varphi(x_1)\overbracket{\varphi(x_2)\varphi}(x_3)\varphi}(x_4)\cdots\varphi(x_n) + \cdots \\ &\qquad + \text{すべての可能な縮約の組み合わせ}\} \end{aligned} \tag{6.164}$$

ただし，$N\{\cdots\}$ は正規順序積を表す．

これは

$$:\left[\exp\frac{1}{2}\int dxdyD_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\right]\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n): \tag{6.165}$$

と書くことができる．

6.2.4 計算例とファインマン ダイアグラム

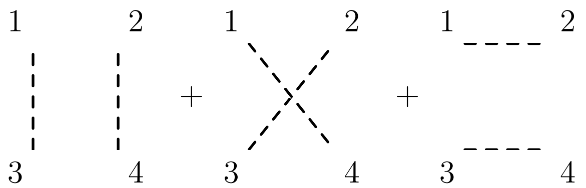
4 点関数 まず，最も簡単な例として

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\}|0\rangle \tag{6.166}$$

を計算してみよう．いま，真空による期待値を取っているので正規順序積の中で場の残っているものはゼロになる．そこで，完全に縮約をとったものだけを計算すればよい．結果は

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\}|0\rangle &= \overbracket{\varphi(x_1)\varphi}(x_2)\,\overbracket{\varphi(x_3)\varphi}(x_4) + \overbracket{\varphi(x_1)\varphi}(x_3)\,\overbracket{\varphi(x_2)\varphi}(x_4) \\ &\quad + \overbracket{\varphi(x_1)\varphi}(x_4)\,\overbracket{\varphi(x_2)\varphi}(x_3) \end{aligned} \tag{6.167}$$

これを，それぞれの場に点を対応させ，縮約を取る場同士を破線でつないだ図を対応させると

$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\}|0\rangle =$ 

(6.168)

と直感的にわかりやすくなる．以上の計算には相互作用ハミルトニアンの項は考慮されていないので結果は単に D_F の積になる．

2 点関数と相互作用　相互作用表示では，相互作用の効果は $e^{i\int d^4x\mathcal{H}_I}$ の項を展開することによって摂動展開として取り込むことになる．相互作用の効果を見るために 2 点関数，つまりプロパゲータを計算してみよう．求めるべき振幅は

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)e^{-i\int d^tH_I}\}|0\rangle = \langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y) - i\varphi(x)\varphi(y)\int d^4z\mathcal{H}_I + \cdots\}|0\rangle \quad (6.169)$$

である．φ^4 理論では，よって

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\int d^4z\frac{-i\lambda}{4!}\varphi^4(z)\}|0\rangle \quad (6.170)$$

これは

$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\varphi^4(z)\}|0\rangle = 3\frac{-i\lambda}{4!}($ $\times$  $z\ ) + 12\frac{-i\lambda}{4!}$  (6.171)

たとえば，最後のグラフは

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(y)\int d^4z\varphi(z)\varphi(z)\varphi(z)\varphi(z)\}|0\rangle \quad (6.172)$$

がこれをプロパゲータを使って表すと

$$graph = \frac{-i\lambda}{4!}\int d^4zD_F(x-z)D_F(y-z)D_F(z-z) \quad (6.173)$$

である．グラフが与えられると具体的な振幅を与えることは，この例からも明らかなように次のような簡単な規則で行える．

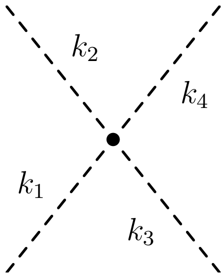
1. プロパゲータ：$D_F(x-y)$
2. バーテックス：$(-i\lambda)\int d^4z$
3. 端点（外線）：1

ただし，プロパゲータは実際上はフーリエ変換を使って運動量空間で書かれているので，この規則も最初から運動量空間で与えておくのが実用的である．

運動量表示のファインマン則　運動量空間でのファインマン則を導くには，実際にそれぞれの運動量表示を代入して，空間積分を実行してしまうとよい．プロパゲータは

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = D_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2-m^2+i\epsilon}e^{ik(x-y)} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_F(k)e^{ik(x-y)} \tag{6.174}$$

で，外線にある場合は k 積分が残り，位置の関数となる．プロパゲータが Vertex に端点をもつ場合は，Vertex に伴う位置の積分からデルタ関数が出る．



$$= \quad -i\lambda(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4) \tag{6.175}$$

このことは，実際に上のファインマン図に相当する積分を書いてやると

$$(-i\lambda)\prod_i^4[\int \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}D_F(k_i)]\int d^4ze^{\sum ik_i(z-x_i)} = (-i\lambda)\prod_i^4[\int \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}D_F(k_i)e^{-ik_ix_i}](2\pi)^4\delta(\sum_i k_i) \tag{6.176}$$

(ここで場は全て z に向かっている．)

一方，外部の点は，x^μ に関してフーリエ変換を行う．このために，$e^{-ik\cdot x_i}$ を掛けて，d^4x で積分をする．すると，$(2\pi)^4\delta^4(k-k_i)$ がでるが，これは，プロパゲータの k 積分をすることによって，1 を与える．結局，外線にはその運動量 k_i を指定して，プロパゲータには $D_F(k_i)$ が積分なしにかかるだけになる．

そこでファインマンルールは

1. プロパゲータ：

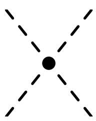
$$= \quad \frac{i}{-k^2-m^2+i\epsilon} \tag{6.177}$$

2. 外線にはその運動量を k とすると，$D_F(k)$ がかかる．

k

$$= \quad D_F(k) \tag{6.178}$$

3. 頂点：



$$= \quad -i\lambda \ \ (\times\frac{1}{4!}) \tag{6.179}$$

さらに，運動量保存 $(2\pi)^4\delta^4(\sum k_i)$

4. 内線のプロパゲータの定まっていない運動量について積分：$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

5. Symmetric factor で割る.（場合の数を数える. 4 点の場合 4! 通りある.）

今の場合外線は有限の点で粒子が生まれることになっている．そこで，外線に e^{ik_ix} を掛けて外線を運動量の固有状態に設定した．ただし，散乱状態を考えるには同時に粒子が無限の過去から飛んできて，散乱の後無限の未来に去っていく状態を記述する．このように考えることで，運動量の固有状態の（平面波の）入射粒子が散乱後やはり運動量固有状態の粒子で表される終状態に遷移する確率を計算する．このことは S 行列を導入することによって明らかになるが，その議論に入る前に，ここでは分母の意味について考えておく．

6.2.5 Connected graph と規格化

我々が計算するべき相関関数は

$$\langle\Omega|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\varphi_I(x_1)\varphi_I(x_2)\cdots\varphi_I(x_n)e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I}\}|0\rangle}{\langle 0|e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}dtH_I}|0\rangle} \tag{6.180}$$

いくつかの場合についてファインマングラフを書いてみる．

$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots e^{-i\int dtH_t(t)}\}|0\rangle = (Connected)\times\sum_{all\ \ n_i}(\prod\frac{1}{n_i!}V_i^{n_i}) \tag{6.181}$$

V_i は i このバーテックスをもつ外線の無いダイアグラム．外線として開いたグラフになる場合，その外線のつながる相互作用ハミルトニアン H_I を選ぶ場合の数が H_I^n だと，n 通りあるので，結果として指数関数の $\frac{1}{n!}$ を $\frac{1}{(n-1)}!$ にする．残りが全て内線のみで縮約する場合 (disconnected graph) を考えると，その場合の数はちょうど，外線のない場合のグラフ

$$\langle 0|T\{e^{-i\int dtH_t(t)}\}|0\rangle = \sum_{all\ \ n_i}(\prod\frac{1}{n_i!}V_i^{n_i}) \tag{6.182}$$

と一致するはずである．よって相互作用表示の分母は，disconnected graph の因子をちょうど打ち消すことになっている．

そこで，規格化された correlation function

$$\langle\Omega|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|\Omega\rangle \tag{6.183}$$

は外線につながった Connected graph のみを考えれば良いことになる．

注意：disconnected というのは，外線とつながっていないという意味で，外線につながっている線が互いに disconnected な場合は考慮しなくてはならない．しかし，この場合は散乱のない過程ということになる．

6.3 発散の繰り込み

このように，correlation function が摂動で定まっていくことになる．しかし，この展開はいたるところに発散積分が現れる．ここでは，少しこの点について考えてみる．
2 点関数の展開

1. 0 次, それぞれの端点を k_1, k_2 の運動量の固有状態に置き換えると

$$\int d^4xd^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k)e^{i(k-k_1)x-i(k+k_2)y} = (2\pi)^4\delta(k_1+k_2)D_F(k_1) \tag{6.184}$$

を得る．

2. 1 次の項は，運動量表示でのファインマン則を使うと

$$D_F(k_1)(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}D_F(k)D_F(k_2) = D_F(k_1)(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(-i\delta m^2)D_F(k_2) \tag{6.185}$$

と書ける．この δm^2 は以下で見るように発散している．

3. 発散項 $(-i\delta m^2)$ の計算：ここで，少し技術的になるが，場の理論において発散がどのように処理されているかの感じをつかむために，この発散積分の評価を実行してみよう．発散積分は何らかの方法で有限化を行うことになる．ここでは，一番基本的な方法として，いわゆるシュヴィンガーパラメータによる積分を行う．実行するべき積分は,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{-k^2-m^2} = \int_0^\infty dz \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-iz(k^2+m^2-i\epsilon)} \\ &= \int_0^\infty dz \frac{e^{-iz(m^2-i\epsilon)}}{(16\pi)^2 iz^2} \\ &= \lim_{\Lambda\to\infty}\int_{1/\Lambda^2}^\infty dz \frac{e^{-iz(m^2-i\epsilon)}}{(16\pi)^2 iz^2} \end{aligned} \tag{6.186}$$

ここで，次のような積分の公式を使う.[22]

$$\begin{aligned} \int_\tau^\infty dz\frac{e^{-az}}{z^2} &= -\frac{e^{-az}}{z}\Big|_\tau^\infty - a\int_\tau^\infty \frac{e^{-az}}{z} \\ &= \frac{e^{-a\tau}}{\tau} + a(\gamma_E + \log(a\tau) + O(\tau)) \\ &= \frac{(1 - a\tau + O(\tau^2))}{\tau} + a(\gamma_E + \log(a\tau) + O(\tau)) \end{aligned}$$

[22] これは，$\Gamma(-1)$ の評価にあたっている．また，

$$Ei(-\tau) = -\int_\tau^\infty \frac{e^z}{z}dz \tag{6.187}$$

は積分指数関数と呼ばれている．ここでは，その漸近展開の公式を使った．

$$= \frac{1}{\tau} + a\log(a\tau) + a(\gamma_E - 1) + O(\tau) \tag{6.188}$$

ただし，

$$\gamma_E = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{1}{k} - \log n\right) = 0.57721\cdots \tag{6.189}$$

でオイラー定数 (Euler-Mascheroni constant) と呼ばれる．この結果を代入すると

$$iI_0 = \lim_{\Lambda\to\infty}[\Lambda^2 + (im^2\log(im^2/\Lambda^2) + im^2(\gamma_E - 1) + O(\frac{1}{\Lambda^2})] \tag{6.190}$$

よって１次の項は

$$D_F(k_1)(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2)(-i\delta m^2)D_F(k_2) \quad , \quad \delta m^2 = iI_0 \tag{6.191}$$

4. ここまでの計算で，λ の１次までのそれぞれの項を求めることができた．そこで，１次のオーダーまでのプロパゲータを求めると，デルタ関数をくくり出した後：

$$\begin{aligned} D_F(k) + D_F(k)(-i\delta m^2)D_F(k) &= \frac{-i}{k^2+m^2} + \frac{-i}{k^2+m^2}(-i\delta m^2)\frac{-i}{k^2+m^2} + \cdots \\ &= \frac{-i}{k^2+m^2+\delta m^2} \end{aligned} \tag{6.192}$$

となる．ここで，最後の変形は δm^2 が小さいと思って展開すれば，１次のオーダーで一致するのでまとめた．これを展開すると，グラフとしては１次のグラフが繰り返して出てくる．これは，実際に高次補正を考えると出てくる項で，このように分母にまとめる操作は，単に近似の範囲だけで良いというのではなく，高次の補正を部分的に取り込んでいるという意味でより良い近似を与えていることになる．

5. 繰り込み： このように，発散項 δm^2 は質量に補正を与えていると考えられる．そこで，もともと m^2 は発散していて，最終的な $m_R^2 = m^2 + \delta m^2$ が有限で観測されると考える．この m_R のことを繰り込まれた質量と呼び，このようにして発散を質量の再定義で一見発散が無い理論として扱う方法を質量の繰り込み (mass renormalization, 直訳すれば再規格化である．) と呼ぶ．一方，もとの理論に現れるパラメータ m^2 は裸の質量と呼ばれる．

   発散は他のダイアグラムにも表れ，違った繰り込みが必要になる．繰り込み可能な理論とは，再定義される量が，量子化する前のラグランジアンに現れるパラメータだけの理論のことである．