経路積分は，正準量子化とは異なるアイデアの下に開発された量子化の方法であるが，基本的に正準量子化と等価である．この授業では，経路積分の基礎づけの問題に遡ることはせず，量子論の結果に基づいて，経路積分を導入しそれを場の理論に応用する．以下では自然単位系 $c = \hbar = 1$ を採用する．

1　経路積分

1.1　量子力学の確率振幅の経路積分表示

まず量子力学の経路積分 (path integral) による定式化について簡単に紹介しておこう．$\hat{q}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とし，ハミルトニアン $H(\hat{p}, \hat{q})$ が与えられているとする．量子力学では，位置の固有状態の波動関数 $|q\rangle$ の Δt の時間発展は

$$|q', t'\rangle = e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q, t\rangle \tag{1.1}$$

で与えられる．そこで，q に存在した粒子を Δt 後に q' に見出す確率を与える遷移確率振幅 (transition probability amplitude) は

$$U(q', t'; q, t) = \langle q', t'|e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q, t\rangle \tag{1.2}$$

で与えられる．位置の固有状態が完全系であるので

$$\int dq|q, t\rangle\langle q, t| = 1 \tag{1.3}$$

が成り立つ．このことを使うと，t から $t'' = t+2\Delta t$ の時間発展を表す確率振幅 $U(q'', t''; q, t)$ は，次の式のように t から $t' = t + \Delta t$ への時間発展と t' から $t'' = t + 2\Delta t$ への時間発展に対応した 2 つの振幅の積を中間状態の座標 q' で積分することによって得ることができる．

$$\begin{aligned} U(q'', t''; q, t) &= \int dq' U(q'', t''; q', t')U(q', t'; q, t) \\ &= \int \langle q'', t''|e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q', t'\rangle dq' \langle q', t'|e^{-iH(p,q)\Delta t}|q, t\rangle \end{aligned} \tag{1.4}$$

このことをｎ回繰り返せば，$T = n\Delta t$ の時間発展を Δt の発展の積み重ねで

$$\begin{aligned} U(q', q, T) &= \int \cdots \int \langle q'|e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q_n\rangle dq_n \langle q_n| \cdots \times \\ &\qquad e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q_{j+1}\rangle dq_{j+1} \langle q_{j+1}|e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q_j\rangle dq_j \langle q_j| \cdots |q\rangle \end{aligned} \tag{1.5}$$

のように書くことができる．ここのハミルトニアンはまだ演算子だが，運動量固有状態 $|p\rangle$ が完全系であり

$$1 = \int \frac{dp}{2\pi}|p\rangle\langle p| \tag{1.6}$$

を満たすので，それを挿入すると

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|e^{-iH(\hat{p},\hat{q})\Delta t}|q_j\rangle &= \int \frac{dp_j}{2\pi}\langle q_{j+1}|p_j\rangle\langle p_j|e^{-iH(p_j,q_j)\Delta t}|q_j\rangle \\ &= \int \frac{dp_j}{2\pi}\langle q_{j+1}|p_j\rangle\langle p_j|q_j\rangle e^{-iH(p_j,q_j)\Delta t} \end{aligned} \tag{1.7}$$

のように，演算子を固有値で置き換えることができる．さらに, 時間 Δt が十分小さいとして

$$\langle q_{j+1}|p_j\rangle\langle p_j|q_j\rangle = e^{i(q_{j+1}-q_j)p_j} = e^{i\Delta t\dot{q}_j p_j} \tag{1.8}$$

なので

$$\langle q_{j+1}|e^{-iH(p,q)\Delta t}|q_j\rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{i\{p_j\dot{q}_j - H(p_j,q_j)\}\Delta t} \tag{1.9}$$

と書くことができる．ここで，ハミルトニアンの形を

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q) \tag{1.10}$$

と仮定すると，p_j による積分が実行できて

$$\begin{aligned}\langle q_{j+1}|e^{-iH(p,q)\Delta t}|q_j\rangle &= \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{i\{-\frac{1}{2m}(p_j-m\dot{q}_j)^2+\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2-V(q_j)\}\Delta t} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta t}} e^{i\{\frac{1}{2}m\dot{q}_j^2-V(q_j)\}\Delta t} \end{aligned} \tag{1.11}$$

のようにラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{q}_j^2 - V(q_j)$ で書くことができる．これを元の式に代入すると

$$U(q',q,T) = \int\cdots\int \prod_j [\sqrt{\frac{m}{2\pi\Delta t}}dq_j] e^{i\sum_j \Delta t L(\dot{q}_j,q_j)} \tag{1.12}$$

と書けるが $\Delta t \to 0$ の極限では，ラグランジアンの j による和は時間積分に置き換えることができ，この確率振幅の表示は,

$$\langle q'|e^{-iH(p,q)T}|q\rangle = \int [dq(t)] e^{i\int_t^{t'} dt L(q,\dot{q})} = \int [\mathcal{D}q(t)] e^{iS(q)} \tag{1.13}$$

と書くことができる．ここで，$\int[\mathcal{D}q(t)]$ はすべての可能な経路 $q(t)$ について和をとることを意味する．これが，経路積分による確率振幅の構成である．この振幅が通常の量子力学で求まる振幅と一致することは，少し議論すれば，調和振動子などについては証明することができる．ここでは，場の理論にこの方法を適用して，ファインマン則を導いてみる．

Path integral

$$U(q',q,T) = \int [\mathcal{D}q(t)] e^{i\int_t^{t'} dt L(q,\dot{q})} = \int [\mathcal{D}q(t)] e^{iS(q)} \tag{1.14}$$

1.2 場の量子論と経路積分

1.2.1 母汎関数 Generating functional

経路積分による量子化の方法は場の理論における場の量子化に応用することができる．特に経路積分による定式化は以下に見るようにゲージ対称性がある場合の量子化を見通し良くしてくれる．ここではまず，φ^4 理論と呼ばれる，１個の実スカラー場 φ の理論の量子化を考える．作用は

$$S(\varphi) = -\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \tag{1.15}$$

で与えられる．ここで，m は場の質量で λ は結合定数である．

前節の量子力学の場合との類推で場の状態間の振幅は

$$\langle\varphi'(\mathbf{x})|e^{-iHT}|\varphi(\mathbf{x})\rangle = \int[\mathcal{D}\varphi(x)]e^{iS(\varphi)} \tag{1.16}$$

と書くことができるだろう．ここでは $\varphi(\mathbf{x})$ が力学変数で，右辺の積分は各時刻の場の取りうる全ての状態に関して足し合わせることを意味している．振幅に現れる $|\varphi(\mathbf{x})\rangle$ と $\langle\varphi'(\mathbf{x})|$ はそれぞれ場の始状態と終状態であるが場の理論では真空に取った場合が重要になる．真空の定義は正準量子化においても工夫が必要であったように，定義に注意を要するが，以下では単に無限の過去と未来で場が消えると考えておく．

場の理論では，n 個の粒子の相互作用を与える場の n 点関数 $\langle\Omega|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)|\Omega\rangle$ を求めることが散乱振幅などの計算に必要になる．経路積分法では，真空による場の期待値は次のように表される．

$$\langle\Omega|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)|\Omega\rangle = \frac{\int[\mathcal{D}\varphi(x)]\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)e^{iS(\varphi)}}{\int[\mathcal{D}\varphi(x)]e^{iS(\varphi)}} \tag{1.17}$$

ここで，$[\mathcal{D}\varphi(x)]$ はすべての場の配位に関して”積分”すると考える．また，

$$\langle\Omega|1|\Omega\rangle = 1 \tag{1.18}$$

に規格化されている．このため先ほどの無限大の因子による不定性が解消されている[1]．ただし，真空によるの期待値を与えるということから場の配位はすべて空間の無限遠方では十分早く 0 になっていると考える．このような積分を正確に定義することは時空を格子状に分割しておいて注意深く格子間隔が 0 の極限をとるなどの方法で定義する必要があるが，ここではその存在を受け入れることにする．実際，以下で見るように摂動計算の定式化を議論する限りは，この関係が経路積分を定義していると思っても良い．

注意しておくべきことは，経路積分の定義において常に time slice をとっていることからこの期待値は自動的に時間順序積 (time ordered product) の期待値になっている．

今，母汎関数 (generating functional) を

$$Z(J) = \int[\mathcal{D}\varphi(x)]e^{iS(\varphi)+i\int d^4xJ(x)\varphi(x)} \tag{1.19}$$

[1]実は問題を先送りしただけなのだが．

と定義する．J の項は source term と呼ばれる．実際，φ^4 理論でこの項をつけて運動方程式を求めると，

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 = J \tag{1.20}$$

となり，湧き出しを与える．

Z が母関数と呼ばれるのは，J による汎関数微分によってすべての n 点関数を生成することができるからである．実際汎関数微分をを行うと

$$\frac{-i\delta}{\delta J(x_1)} Z(J) = \int [\mathcal{D}\varphi(x)] \varphi(x_1) e^{iS(\varphi) + i\int d^4x J(x)\varphi(x)} \tag{1.21}$$

のように，場が一個挿入される．ただし

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} J(x) = \delta^4(x_1 - x) \tag{1.22}$$

を使った．これから，n 点の振幅が一般に求まることが分かる．例えば

$$\langle \Omega | \varphi(x_1)\varphi(x_2) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z(J=0)} \frac{-i\delta}{\delta J(x_1)} \frac{-i\delta}{\delta J(x_2)} Z(J) \tag{1.23}$$

である．

具体的に，φ^4-theory の作用を代入すると

$$Z(J) = \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{i\int d^4x (-\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi(x)\partial_\mu \varphi(x) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x) + J(x)\varphi(x))} \tag{1.24}$$

と書ける．ここで，場の 4 次の項は λ の値が十分小さいとして，展開すると，

$$Z(J) = \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{i\int d^4x (-\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi(x)\partial_\mu \varphi(x) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) + J(x)\varphi(x))} (1 - \frac{i\lambda}{4!}\varphi^4(x) + \cdots) \tag{1.25}$$

と書ける．これは母関数 $Z(J)$ の摂動展開を与えている．摂動論では，この λ による展開のそれぞれの order を計算することになる．ここで，相互作用の項は場の挿入になっているので，次のように書くこともできる．

$$Z(J) = e^{-i\int d^4x \frac{\lambda}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J(x)^4}} \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{i\int d^4x (-\frac{1}{2}\partial^\mu \varphi(x)\partial_\mu \varphi(x) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) + J(x)\varphi(x))} \tag{1.26}$$

よって，２次までの $Z(J)$ が求まればそれを使って n 点振幅を計算し加えていけばよい．

1.2.2 伝搬関数 Propagator

ここで，場に関して 2 次までの部分は次のように変形することができる．

$$\begin{aligned} S_{\lambda=0}(J) &= \int d^4x (\frac{1}{2}\varphi(x)(\partial^2 - m^2)\varphi(x) + boundary + J(x)\varphi(x)) \\ &= \int d^4x (\frac{1}{2}(\varphi(x) - iD_F(x-y)\cdot J(y))(\partial^2 - m^2)(\varphi(x) - iD_F(x-y)\cdot J(y)) \end{aligned}$$

$$+ i\frac{1}{2}J(x)D_F(x-y)\cdot J(y)) \tag{1.27}$$

ここで，D_F は

$$(\partial^2 - m^2)D_F(x-y) = i\delta^4(x-y) \tag{1.28}$$

を満たす伝搬関数である．また，$D_F(x-y)\cdot J(y)$ などに現れる「$\cdot$」は，両側の関数の y についての積分を表す．

Fourier 変換をすると

$$(-p^2 - m^2)\tilde{D}_F(p) = i \tag{1.29}$$

であり，

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \quad , \quad D_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-ie^{ip_\mu x^\mu}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \tag{1.30}$$

で与えられる．ここで，$i\epsilon$ は propagator の境界条件を定めるために導入された．(場の量子論 I ノート 3 参照) D_F はファインマン・プロパゲータ (Feynman propagator) と呼ばれる．正準量子化のときには境界条件は因果律と関係して定まったが，経路積分では積分の収束の要請と考えることができる．これは，ファインマン・プロパゲータは，質量を $m^2 - i\epsilon$ としたことに相当するが，これが経路積分においてちょうど収束因子を与えるからである．

さて，以上の結果を使ってやると場の 2 次までの母汎関数は

$$\begin{aligned} Z_0(J) &= \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{i\int d^4x(-\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2(x) + J(x)\varphi(x))} \\ &= e^{\int d^4x - \frac{1}{2}J(x)D_F(x-y)\cdot J(y))} \times \\ &\qquad \int [\mathcal{D}\varphi(x)] e^{i\frac{1}{2}(\varphi(x) - iD_F(x-y)\cdot J(y))(\partial^2 - m^2)(\varphi(x) - iD_F(x-y)\cdot J(y))} \end{aligned} \tag{1.31}$$

と書ける．最後の経路積分は積分変数を変換すると J には依らないのでただの定数と考えてよい．そこで

$$Z_0(J) = Ce^{-\frac{1}{2}\int d^4x J(x)D_F(x-y)\cdot J(y))} \tag{1.32}$$

結局，摂動展開をして求める方法では

$$\langle\Omega|\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|\Omega\rangle = \left.\frac{\Pi_i(-i\frac{\delta}{\delta J(x_i)})e^{-i\int d^4z \frac{-i\delta^4}{\delta J^4(z)}}Z_0(J)}{e^{-i\int d^4z \frac{-i\delta^4}{\delta J^4(z)}}Z_0(J)}\right|_{J=0} \tag{1.33}$$

と計算される．

これが，いわゆる相互作用表示の振幅の計算と等価であり，この展開が次のようにファインマン則を導くことが分かる．

1.2.3 ファインマン則について

φ^4 理論の例で，この経路積分による振幅の表示が，ファインマン則を表していることを確認しておこう．まず，最も簡単な例として 4 点関数を求める．計算は

$$\langle\Omega|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|\Omega\rangle = \left.\frac{\Pi_{j=1}^4(-i\frac{\delta}{\delta J(x_j)})e^{-i\int d^4z\frac{-i\delta^4}{\delta J^4(z)}}Z_0(J)}{e^{-i\int d^4z\frac{-i\delta^4}{\delta J^4(z)}}Z_0(J)}\right|_{J=0} \tag{1.34}$$

である．正準量子化の場合は Wick の定理を使って場の積を正規順序積と縮約に分解していくのだが，経路積分による計算では単に汎関数微分を取るだけでよい．この時，積の微分公式にしたがって挿入された場の座標 x_i がそれぞれのプロパゲータの始点および終点に入っていく．

相互作用を展開して最低次の項を見ることにする．つまり，$\lambda = 0$ の場合の計算である．汎関数微分を注意深く取ってやると

$$\begin{aligned}&\langle\Omega|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|\Omega\rangle\\&\quad= D_F(x_1,x_2)D_F(x_3,x_4)+D_F(x_1,x_3)D_F(x_2,x_4)+D_F(x_1,x_4)D_F(x_2,x_3)\end{aligned} \tag{1.35}$$

になることが分かる．

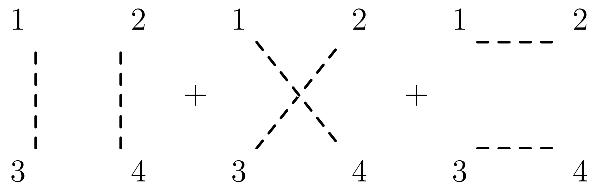
この微分による操作が Wick の定理の縮約

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\}|0\rangle \;=\;& \wick{\c\varphi(x_1)\c\varphi(x_2)}\,\wick{\c\varphi(x_3)\c\varphi(x_4)}+\wick{\c\varphi(x_1)\c\varphi(x_3)}\,\wick{\c\varphi(x_2)\c\varphi(x_4)}\\&+\wick{\c\varphi(x_1)\c\varphi(x_4)}\,\wick{\c\varphi(x_2)\c\varphi(x_3)}\end{aligned} \tag{1.36}$$

と関係していることは明らかであろう．

さらに，それぞれの場に点を対応させ，汎関数微分が同じプロパゲータの両端にかかる場合を破線でつないだ図を対応させると

$$\langle\Omega|\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|\Omega\rangle = \tag{1.37}$$



となり，正準量子化のときに定義したファインマン図と一致する．

問題：

1. (1.32) を導け．

2. (1.35) を係数に注意して求めよ．さらに 4 点関数の λ の 1 次のオーダーのグラフをすべて求めよ．