2 ゲージ理論

文献 Abers-Lee Physics Reports 9 (1973) 1-141,
Path integral quantization: sections 11-12
Gauge theory: section 1
Path integral of Gauge theory: section 14
Spontaneously broken symmetries: sections 2-3

経路積分によるスカラー場の量子化が正準量子化と同じファインマン則を与えることを紹介した．経路積分の方法は，ゲージ理論のように拘束のある系の量子化を単純化してくれる．

2.1 ゲージ対称性

現在素粒子理論で扱われる理論は殆どがゲージ理論である．電磁相互作用はQED(Quantum Electrodynamics)，また弱い力も合わせた弱電磁相互作用の理論は Weinberg-Salam 理論というゲージ理論である．強い相互作用の理論である QCD もゲージ理論の一つである．さらに重力の理論もゲージ理論であることが分かっている．このようなゲージ理論の場の量子論を展開するのが以下の目的である．

まず，この節では場の内部対称性またはゲージ対称性の概念を導入する．最初に，最も基本的な例である複素スカラー場の場の位相変換に関する対称性について考える．

2.1.1 対称性

一般にある場の変換の下で作用が不変な場合それを理論の**対称性**と呼ぶ．自由複素スカラー場の作用は

$$S_0 = \int d^4x(-\partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi) \tag{2.44}$$

である．この作用は場の位相変換

$$\phi(x) \ \to \ \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x) \tag{2.45}$$

について不変である．ここで θ は，座標によらないパラメータである．このように変換が座標によらないような変換に関する不変性を**大域的対称性 (Global symmetry)** または第一種ゲージ変換と呼ぶ．この大局的位相変換による不変性は，作用のそれぞれの項が不変であることから明らかである．

対称性は一般に理論の構造を制限する．例えば，複素スカラー場のポテンシャルに関してもこの不変性を保つことを要請すると，まったく一般の関数は許されずポテンシャルは，場の絶対値の関数

$$V(\phi) = f(\phi^*\phi) \tag{2.46}$$

に制限される．

この対称性のパラメータ θ を座標の関数にまで拡張した場合，**局所ゲージ対称性 (local gauge symmetry)** または第２種ゲージ対称性と呼ばれる．このようにパラメータが座標による変換のもとで (2.44) は，もはや不変ではないが**ゲージ場**と呼ばれるベクトル場を導入することによって不変性を回復できる．このように Global な対称性を Local な対称性にまで拡張するプロセスを対称性の**ゲージ化**と呼ぶ．ゲージ化のプロセスは数学的に導入することもできるが，ここでは，いわゆる電磁場の minimal coupling を導入するときに使われる議論を紹介する．

2.1.2 共変微分

位相変換のパラメータ θ が座標による場合，自由スカラー場の作用が局所ゲージ変換のもとで不変でなくなる理由は，位相が場の微分と可換でなくなり

$$\partial_\mu \phi \ \to \ \partial_\mu e^{i\theta}\phi = (\partial_\mu e^{i\theta})\phi + e^{i\theta}\partial_\mu \phi \tag{2.47}$$

となるからである．変換の右辺の第一項はもし θ が座標によらなければ存在せず，そのため自由複素スカラー場の作用は不変になっている．

ここでもし微分も場を含んでいて，位相変換のもとで変換を受け

$$\nabla_\mu \phi \ \to \ \nabla'_\mu \phi' = e^{i\theta(x)}\nabla_\mu \phi \tag{2.48}$$

となるならば，自由場の作用 (2.44) の微分 ∂_μ を ∇_μ で置き換えれば作用は局所ゲージ変換のもとで不変になる．このような微分 ∇_μ は**共変微分**と呼ばれ，ゲージ場と呼ばれるベクトル場 A_μ を導入することで

$$\nabla_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \tag{2.49}$$

と定義される．ここで e は結合定数と呼ばれ，電磁場の場合は電子の電荷になる．

微分形式について

ここで以下の計算で式が見やすくなるように次のような微分記号を導入しておく．

$$d = \sum_\mu dx^\mu \partial_\mu \tag{2.50}$$

つまり，微分 ∂_μ や共変ベクトル場 A_μ にいつも dx^μ(共変ベクトルの基底，余接ベクトルの基底) をつけて書いておく．さらに，ゲージ場も

$$A = \sum_\mu A_\mu dx^\mu = A_\mu dx^\mu \tag{2.51}$$

と基底付きで書いておく．d を外微分, $A = A_\mu dx^\mu$ を１形式 (1-form) と呼ぶ．このような表記法は微分形式と呼ばれるが，詳しいことは別にしてここではこのような簡便記号と思ってもらって OK である．dx^μ はすべての微分 ∂_μ または場とは可換であると約束する．

すると上で導入した共変微分は

$$\nabla\phi = dx^\mu \nabla_\mu \phi = dx^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi = (d - ieA)\phi \tag{2.52}$$

と書けいかに簡便化されるかが分かるであろう．

共変微分がゲージ変換のもとで要請 (2.48) を満たすように A'_μ を定めればよい．それぞれが

$$\begin{aligned} \nabla'\phi' &= (d - ieA')e^{i\theta}\phi = e^{i\theta}(d + e^{-i\theta}de^{i\theta} - ieA')\phi \\ e^{i\theta}\nabla\phi &= e^{i\theta}(d - ieA)\phi \end{aligned} \tag{2.53}$$

と書けるので，これらが等しいことを要請すると

$$-ieA' = e^{i\theta}de^{-i\theta} - ieA = -i(d\theta + eA) \tag{2.54}$$

という関係式を得る．よって

$$A' = A + \frac{1}{e}d\theta \quad \left(\text{成分で書くと} \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right) \tag{2.55}$$

と変換が定まる．この変換は，電磁場の満たすゲージ変換と同じであるので，ベクトル場 A_μ は４元電磁ポテンシャルと見ることができる．

ゲージ理論は，物理量がゲージ変換に関して不変であることを要請する．ベクトルポテンシャルはゲージ変換をすると変化するので物理量ではないが，次の**場の強さ (field strength)** は，ゲージ不変量である

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{e}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \\ &= \frac{i}{e}[\partial_\mu - ieA_\mu, \partial_\nu - ieA_\mu] \end{aligned} \tag{2.56}$$

ここで，括弧は通常の交換子 $[A, B] = AB - BA$ である．微分に注意してこの交換子を計算すると

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.57}$$

を得る．これは，電磁気学に現れる電磁テンソルである．

微分形式について 2

先ほど，基底 dx^μ をつけて書く方法を紹介したが場の強さも同様の記号で書くことが出来る．このために，次のウェッジ積 $\wedge$ と呼ばれる基底間の反対称積を

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \tag{2.58}$$

のように定義する．場の強さは反対称テンソルなので，この記法に従えば

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.59}$$

と書ける．さらに微分 $d = dx^\mu \partial_m u$ の A に関する作用を

$$dA = dx^\mu \partial_\mu (A_\nu dx^\nu) \equiv (\partial_\mu A_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.60}$$

と定義する．ウェッジ積が反対称積であることを使うと

$$dA = (\partial_\mu A_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{2.61}$$

と書ける．つまり

$$F = dA \tag{2.62}$$

である．

一応復習をかねて，電磁気との対応を見ておく．ベクトル場はクーロンポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\vec{A}$ が

$$A_\mu = (-\phi, \vec{A}) \tag{2.63}$$

のように入り，場の強さは

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

である．

この時作用は

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.65}$$

である．これを電磁気の場合に書くと

$$S_A = \frac{1}{2} \int d^4x (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \tag{2.66}$$

になっている．

よって局所対称性をもった作用は

$$S = \int d^4x (-\nabla_\mu \phi^* \nabla_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - V(\phi)) - \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.67}$$

で与えられる．このようにして，大局的な位相対称性をゲージ化することによって，ゲージ場 A_μ を導入し局所対称性をもつような作用を求めることが出来た．

exercise

1. $F = \nabla^2$ と書けることを示せ．(スカラー場の共変微分を 2 回取ってみると良い．$\nabla(\nabla\phi)$)
2. F が，ゲージ変換で不変であることを示せ.（場の強さがゲージ不変になるのは，$U(1)$ が可換群であるためである.）

2.1.3 ゲージ理論の一般化

前節では，複素スカラー場の大域的位相変換の対称性を局所的ゲージ変換に格上げする形でゲージ場を導入した．このようなプロセスを対称性のゲージ化と呼ぶ．現代では，このゲージ化の手法によって様々な局所ゲージ理論が構成されそれらを総称してゲージ理論と呼ぶ．ここでは，**SU(2)Yang-Mills 理論**を構成する．

今質量の等しい 2 個の複素スカラー場の作用を考える．この作用は 2 個のスカラー場 ϕ_1, ϕ_2 を 2 成分縦ベクトルとみなした場

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{2.68}$$

を導入すると

$$S = \int d^4x - \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{2.69}$$

と書くことが出来る．この作用は明らかに大域的ユニタリー変換

$$\Phi(x) \ \rightarrow \ \Phi'(x) = U\Phi(x) \tag{2.70}$$

に関して不変である．ここで，U は 2×2 複素ユニタリー行列である．ここで，この $U(2)$ の対称性をゲージ化することも可能であるが，以下では簡単のために，その部分群 $SU(2)$ のゲージ化を議論する．

よって座標に依る行列 $U(x)$

$$U(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \quad , \quad U^\dagger = U^{-1} \quad , \quad \det U = 1 \tag{2.71}$$

による局所ゲージ対称性を考える．この時，共変微分には

$$\nabla\Phi \ \rightarrow \ \nabla'\Phi' = \nabla' U\Phi = U\nabla\Phi \tag{2.72}$$

を満たすことを要請する．これによって，Φ の作用の微分 ∂_μ を ∇_μ で置き換えることによって局所ゲージ対称性が保たれる．

このような共変微分は行列に値を持つようなベクトル場 $\mathbf{A}_\mu$ を導入することで実現できる．

$$\nabla_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ig\mathbf{A}_\mu \Phi \tag{2.73}$$

先ほどと同じように要請 (2.72)

$$\nabla' = U \nabla U^{-1} \tag{2.74}$$

と書けるので

$$-ig\mathbf{A}'_\mu = U(\partial_\mu U^{-1}) - igU\mathbf{A}_\mu U^{-1} \tag{2.75}$$

または

$$\mathbf{A}' = U\mathbf{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}U(\partial_\mu U^{-1}) \tag{2.76}$$

$$\nabla' = d - ie\mathbf{A}' = U(d - ie\mathbf{A})U^{-1} \tag{2.77}$$

である．今変換が無限小だとすると

$$U = 1 + i\theta\mathbf{1} + i\lambda^a T_a \ , \ U^{-1} = U^\dagger = 1 - i\theta\mathbf{1} - i\lambda^a T_a \tag{2.78}$$

と展開される．ここで，θ は場全体の位相変換の自由度であり，前節の電磁力に対応したゲージ対称性である．一方，T_a は Traceless-Hemite 行列で，今の場合パウリ行列 σ_a, $a = 1, 2, 3$ を使って

$$T_a = \frac{1}{2}\sigma_a \tag{2.79}$$

と定義されている．

リー群の言葉を使うならば U は $SU(2)$ の元であり，

$$U = e^{i\lambda^a T_a} \tag{2.80}$$

とパラメータ λ^a を使って書くことが出来る．この時 T_a は，群 $SU(2)$ の生成元と呼ばれ，

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \tag{2.81}$$

を満たす．このように生成元が交換しない群を非アーベル群，それに対して $U(1)$ はアーベル群と呼ばれる．

無限小 $SU(2)$ 変換のもとでゲージ場の変換性は

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}'_\mu &= (1 + i\lambda^a T_a)\mathbf{A}_\mu(1 - i\lambda^a T_a) + \frac{i}{g}(1 + i\lambda^a T_a)\partial_\mu \lambda^a T_a \\
&= \mathbf{A}_\mu + i[\lambda^a T_a, \mathbf{A}_\mu] + \frac{i}{g}\partial_\mu(-i\lambda^a T_a)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

無限小変換をのもとでの場の変化を

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu + \delta\mathbf{A}_\mu \tag{2.83}$$

と書くと

$$\delta \mathbf{A}_\mu = i[\lambda^a T_a, \mathbf{A}_\mu] + \frac{1}{g}\partial_\mu \lambda^a T_a = \frac{1}{g}(\partial_\mu \lambda^a T_a - ig[\mathbf{A}_\mu, \lambda^a T_a]) \tag{2.84}$$

を満たす必要がある．このような変換が場の変換として閉じるためには $\mathbf{A}_\mu = A^a_\mu T_a$ のように場自身が生成元 T_a で展開されていればよい．すると，生成元の交換子が再び生成元で展開できることから

$$\delta A^a_\mu T_a = \frac{1}{g}(\partial_\mu \lambda^a + g\epsilon_{bca} A^b_\mu \lambda^c) T_a \tag{2.85}$$

と書け，場の変換が

$$\delta A^a_\mu = \frac{1}{g}(\partial_\mu \lambda^a + g\epsilon_{bca} A^b_\mu \lambda^c) \tag{2.86}$$

を満たせばよいことが分かる．

2.1.4 まとめ：ゲージ対称性と群

ゲージ対称性は，通常その対称性の群に対応して名前が付けられる．上記の電磁場の例では，ゲージ対称性は場の位相変換であった．位相の作る群は $U(1)$ と呼ばれる．具体的には, 元は $e^{i\theta} \in U(1)$ でその積は

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \tag{2.87}$$

で与えられる．この積は明らかに可換 $(a \cdot b = b \cdot a)$ なので，$U(1)$ は可換群またはアーベル群と呼ばれる種類の群である．そこで，電磁場をゲージ理論として見ると，$U(1)$ ゲージ理論と呼ぶ.

一方，Yang-Mills 理論は 2 個の複素ベクトルの長さを変えない回転の対称性をゲージ化している．一般に N 次元複素ベクトルの絶対値を変えない変換の群は N 次元複素ユニタリー群の作る群であり $U(N)$ 群と呼ぶ．$U(N)$ 群は，前節の $U(2)$ の場合と同様にベクトル全体の位相だけを分離することができ

$$U(N) = U(1) \times SU(N) \tag{2.88}$$

のように分解することができる．$SU(N)$ は非アーベル群である．$SU(N)$ 対称性をゲージ化してできる群を $SU(N)$ ゲージ理論と呼ぶ.

$U(1)$ ゲージ理論

1. ゲージ対称性は $U(1)$
2. 共変微分は, 1 個のゲージ場 A_μ を使って
$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi \quad , \quad \nabla \phi = (d - ieA)\phi \tag{2.89}$$
と定義される.
3. 有限ゲージ変換 $\phi' = e^{ie\theta}\phi$ でゲージ場の変換は
$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta \quad , \quad A' = A + d\theta \tag{2.90}$$
4. 無限小ゲージ変換 $e^{ie\theta} \simeq 1 + ie\theta$, $\theta << 1$
$$\delta A_\mu = \partial_\mu \theta \quad , \quad \delta A = d\theta \tag{2.91}$$
5. 場の強さ $F_{\mu\nu}$ とそのゲージ変換
$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad , \quad F = \frac{i}{e}\nabla^2 = dA \tag{2.92}$$
ゲージ変換で不変.
6. ビアンキ恒等式
$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + cyclic = 0 \quad , \quad dF = 0 \tag{2.93}$$

$SU(2)$ ゲージ理論

1. **ゲージ対称性**は $G = SU(2)$(一般には $G = SU(N)$) とする．群の元はパラメータを λ^a , $(a = 1, \cdots, dim(G))$ とすると $U = e^{i\lambda^a T_a}$ と表される．ここに,

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \tag{2.94}$$

を満たす $SU(2)(SU(N))$ の生成元で，ϵ_{abc}(一般に f_{abc}) は群の構造定数と呼ばれる完全反対称テンソルである．

2. 共変微分は,3 個 ($dim(G) = N^2 - 1$ 個) のゲージ場 A^a_μ を使って

$$\nabla_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi - igA^a_\mu T_a\Phi \quad , \quad \nabla\Phi = (d - igA)\Phi \tag{2.95}$$

と定義される．ただし，$A = A^a_\mu T_a dx^\mu$

3. **有限ゲージ変換：**時空の各点 x^μ で G の元を $U = e^{ig\lambda^a(x)T_a}$ とする．ここで結合定数 g を導入した．有限ゲージ変換の下で，2 次元表現 (N 次元表現) の場 Φ は

$$\Phi \;\to\; \Phi' = U\Phi \tag{2.96}$$

と変換する。一方、ゲージ場の変換は $\nabla_\mu\Phi$ の共変性から

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} \quad , \quad A' = UAU^{-1} + \frac{i}{g}UdU^{-1} = \frac{i}{g}U\nabla U^{-1} \tag{2.97}$$

で与えられる。

4. **無限小ゲージ変換：**$U \simeq 1 + ig\lambda^a T_a$, $\lambda^a << 1$ でスカラー場の無限小変換は

$$\delta\Phi = ig\lambda^a T_a\Phi \qquad \Big(\delta\Phi = ig\lambda\Phi\Big) \tag{2.98}$$

ゲージ場の無限小変換は,

$$\delta A^a_\mu T_a = \partial_\mu\lambda^a T_a - ig[A^b_\mu T_b, \lambda^c T_c] = (\partial_\mu\lambda^a + g\epsilon^a{}_{bc}A^b_\mu\lambda^c)T_a \quad , \quad \delta A = \nabla\lambda = d\lambda - ig[A, \lambda] \tag{2.99}$$

で与えられる。

5. **場の強さ $F_{\mu\nu}$ とそのゲージ変換:** 場の強さは

$$F^a_{\mu\nu}T_a = \frac{i}{g}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\mu] \quad , \quad F = \frac{i}{g}\nabla^2 = dA - igA^2 \tag{2.100}$$

で与えられ，ゲージ変換に関して共変である：

$$F^a_{\mu\nu}T_a \;\;\to\;\; UF^a_{\mu\nu}T_a U^{-1} \quad , \quad F' = UFU^{-1} \tag{2.101}$$

無限小変換に関しては

$$\delta F^a_{\mu\nu}T_a = ig[\lambda^a T_a, F^a_{\mu\nu}T_a] \quad , \quad \delta F = ig[\lambda, F] \tag{2.102}$$

6. **ビンアンキ恒等式：** $[\nabla_\mu, F_{\nu\rho}] = 0$, 微分形式を使うと $\nabla F = 0$ これは Jacobi 恒等式から，$[\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\Phi + cyclic = 0$ になることを使えば証明できる．