問題 (p32 参照)

磁場中の荷電粒子

z 軸方向で大きさが B の一様磁場中の荷電粒子の運動を考える．粒子の質量を m, 電荷を e とし，x-y 平面内の運動のみを考えその座標を x^1, x^2 とする．この時ベクトルポテンシャルは

$$A_i = \frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j \tag{1}$$

で与えられる[a]．ここで ϵ_{ij} は反対称テンソル $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ である．

1. ラグランジアンを求めよ．
2. ハミルトニアンを求めよ．
3. 共役運動量を p_i とし，
$$\Pi_i = p_i - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{ij}x^j \tag{2}$$
と定義する．x^i および p_i と Π_i のポアッソン括弧を求めよ．さらに，正準方程式を求めよ．
4. ポアッソン括弧 $\{\Pi_i, \Pi_j\}$ を求め，Π_i に関する正準方程式から Π_i がそれぞれ単振動をしていることを示せ．
5. 運動方程式の解を求め，粒子が円運動していることを示せ．
6. 円運動の中心座標 X^i を x^i と Π_i を用いて表せ．
7. 前問の中心の座標が保存量であることを示せ．
8. さらに，x^2 方向に一定電場 E をかけた．この系のハミルトニアンを求め，中心座標がどのような動きをするか求めよ．
9. 中心座標間のポアッソン括弧を求めよ．

[a]以下では和の記号 $\sum$ を省略して，この式の j のように添え字が繰り返して現れるときは，その和を取ると約束する．

解答

1. 荷電粒子のラグランジアンにこのベクトルポテンシャルを代入すると[1]，一様磁場中の荷電粒子のラグランジアン
$$L = \frac{1}{2}m\sum_i(\dot{x}^i)^2 - \frac{1}{2}m\omega\sum_{i,j}\epsilon_{ij}x^i\dot{x}^j \tag{5}$$
が得られる．ただし，$\frac{\omega = eB}{m}$ はサイクロトロン角速度．

[1] 3次元では
$$\mathbf{A} = (\frac{1}{2}Bx^2, -\frac{1}{2}Bx^1, 0) \tag{3}$$
である．そこで，ラグランジアンに現れる相互作用項は
$$\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{2}B(\dot{x}^1x^2 - \dot{x}^2x^1) = -\frac{1}{2}B\epsilon_{ij}x^i\dot{x}^j \tag{4}$$
になる．

2. 共役運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m(\dot{x}_i + \frac{1}{2}\omega\epsilon_{ij}x^j) \tag{6}$$

である．ハミルトニアンはこの共役運動量を使って

$$\begin{aligned} H &= \sum x^i p_i - L = m\dot{x}^i(\dot{x}_i + \frac{1}{2}\omega\epsilon_{ij}x^j) - [\frac{1}{2}m(\dot{x}^i)^2 - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{ij}x^i\dot{x}^j] \\ &= \frac{1}{2}\sum_i(\dot{x}^i)^2 = \frac{1}{2m}\sum_i(p_i - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{ij}x^j)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

よって，繰り返し現れる添え字に関する和の省略を復活させると

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2}(p_i - \frac{1}{2}m\omega\sum_{j=1}^{2}\epsilon_{ij}x^j)^2 \tag{8}$$

である．

3. Π_i を使うと

$$H = \frac{1}{2m}\sum_i(\Pi_i)^2 \tag{9}$$

と書ける[2]．Π_i と力学変数 x^i および p_i とのポアッソン括弧は

$$\{x^i, \Pi_j\} = \delta^i_j \ , \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \{p_i, \Pi_j\} &= \{p_i, p_j - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{jk}x^k\}\frac{1}{2}m\omega\epsilon_{jk}\delta^k_i \\ &= -\frac{1}{2}m\omega\epsilon_{ij} \end{aligned} \tag{11}$$

である．ハミルトニアンが Π_i の 2 乗でかけているので，正準方程式はポアッソン括弧がライプニッツ則を満たすことを使って

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \{x^i, H\} = \frac{1}{2m}\sum_k\{x^i, (\Pi_k)^2\} = \frac{1}{m}\sum_k\{x^i, \Pi_k\}\Pi_k = \frac{1}{m}\sum_k\delta^i_k\Pi_k \\ &= \frac{1}{m}\Pi^i \end{aligned} \tag{12}$$

同様に

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{1}{2}\omega\sum_j\epsilon_{ij}\Pi_j \tag{13}$$

4. Π_i 間のポアッソン括弧は

$$\begin{aligned} \{\Pi_i, \Pi_k\} &= \{p_i - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{ij}x^j, p_k - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{kl}x^l \\ &= -\frac{1}{2}m\omega\epsilon_{kl}\{p_i, x^l\} - \frac{1}{2}m\omega\epsilon_{ij}\{x^j, p_k\} \\ &= -m\omega\epsilon_{ik} \end{aligned} \tag{14}$$

[2] Π_i は粒子の速度に比例しており，ハミルトニアンは粒子の速さの 2 乗に比例している．つまり粒子の速さの 2 乗はハミルトニアンとポアッソン括弧をとると 0 になるので保存量である．これは荷電粒子の速さが一定であることを意味する．実は，一般に磁場が一様でなくても荷電粒子の速さが保存する．

になる．よって Π_i の時間発展は正準方程式より

$$\dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H\} = \frac{1}{m}\sum_k \{\Pi_i, \Pi_k\}\Pi_k = -\omega \sum_k \epsilon_{ik}\Pi_k \tag{15}$$

これをさらに時間微分すると，

$$\ddot{\Pi}_i = -\omega \sum_j \epsilon_{ij}\dot{\Pi}_j = \omega^2 \sum_{j,k} \epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\Pi_k = -\omega^2 \Pi_i \tag{16}$$

よって，Π_i はそれぞれ角速度 ω で単振動している．

5. $\dot{x}_i = \frac{1}{m}\Pi_i$ であることから，

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}\dot{\Pi}_i = -\omega\epsilon_{ik}\Pi_k \tag{17}$$

となるので，$z = x^1 + ix^2$ とすると，上記の運動方程式は

$$\ddot{z} = i\omega\dot{z} \tag{18}$$

という簡単な形になる．この一般解は $\dot{z} = Ae^{i\omega t}$ なので, さらに積分すると

$$z = \frac{A}{i\omega}e^{i\omega t} + C \tag{19}$$

である．A, C はそれぞれ複素定数である．元の座標に戻すために $A = i\omega Re^{i\delta}$,$C = C_1 + iC_2$ とすると一般解として

$$x^1 = R\cos(\omega t + \delta) + C^1 \quad , \quad x^2 = R\sin(\omega t + \delta) + C^2 \tag{20}$$

を得る．解より粒子は等速円運動をしていて，R は円運動の半径，δ と C^i はそれぞれ回転の位相と中心の座標を表す．これは荷電粒子のサイクロトロン運動 (cyclotron motion) であり，$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{eB}{2\pi m}$ はサイクロトロン周波数 (cyclotron frequency) とよばれ，粒子の速度は $v = \omega R$ で与えられる．

6. 円運動

$$z = Re^{i(\omega t + \delta)} + C \tag{21}$$

の中心座標は

$$C = z - \frac{1}{i\omega}z \tag{22}$$

で与えられる．そこで，一般に x^i が与えられたときの中心座標は

$$X^i = x^i - \frac{1}{\omega}\epsilon^{ij}\dot{x}_j \tag{23}$$

である．Π_i の定義を使うと

$$X^i = x^i - \frac{1}{m\omega}\epsilon^{ij}\Pi_j \tag{24}$$

が中心座標である．

7. 中心座標と Π_i のポアッソン括弧を求めると

$$\begin{aligned} \{X^i, \Pi_j\} &= \{x^i, \Pi_j\} - \frac{1}{m\omega}\epsilon^{ik}\{\Pi_k, \Pi_j\} \\ &= \delta^i_j - \frac{1}{m\omega}\epsilon^{ik}(-m\omega)\epsilon_{kj} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

ハミルトニアンは Π_i の 2 乗なので

$$\dot{X}^i = \{X^i, H\} = 0 \tag{26}$$

つまり，円運動の中心座標は運動の保存量であることが分かる．

8. x^2 方向の一定電場 E を与えるポテンシャルは $\phi = -eEx^2$ である．ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}\sum_i (\Pi_i)^2 + \phi \tag{27}$$

である．この時，$\{X^i, \Pi_j\} = 0$ なので

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= \{X^i, H\} = \{X^i, \phi\} = \{X^i, -eEx^2\} = \frac{-eE}{m\omega}\epsilon^{ij}\{\Pi_j, x^2\} \\ &= \frac{eE}{m\omega}\epsilon^{i2} \end{aligned} \tag{28}$$

よって

$$\dot{X}^1 = \frac{eE}{m\omega} = \frac{E}{B} \quad , \quad \dot{X}^2 = 0 \tag{29}$$

つまり，回転の中心は速さ $\frac{E}{B}$ で x^1 方向に等速直線運動をする．

9.

$$\begin{aligned} \{X^i, X^j\} &= \{x^i - \frac{1}{m\omega}\epsilon^{ik}\Pi_k, x^j - \frac{1}{m\omega}\epsilon^{jl}\Pi_l\} \\ &= \{x^i, x^j\} - \frac{1}{m\omega}(\epsilon^{ik}\{\Pi_k, x^j\} + \epsilon^{jl}\{x^i, \Pi_l\}) + \frac{1}{m^2\omega^2}\epsilon^{ik}\epsilon^{jl}\{\Pi_k, \Pi_l\} \\ &= -\frac{1}{m\omega}(-\epsilon^{ij} + \epsilon^{ji}) + \frac{1}{m^2\omega^2}\epsilon^{ik}\epsilon^{jl}(-m\omega)\epsilon_{kl} \\ &= \frac{2}{m\omega}\epsilon^{ij} + (-m\omega)\frac{1}{m^2\omega^2}\epsilon^{ij} \\ &= \frac{1}{m\omega}\epsilon^{ij} = \frac{1}{eB}\epsilon^{ij} \end{aligned} \tag{30}$$

サイクロトロン運動を正準理論を用いて解析する問題である．一様電磁場の下の粒子の運動は基本的に円運動であり，それぞれの座標方向に単振動をしていることが分かる．量子力学でランダウ準位を求めるときに，似たような解析方法を使うことができる．