**2重振り子**

天井に固定された紐に2個のおもりがつながれた2重振り子がある．固定点から長さが $l_1$ のところのおもりの質量が $m_1$，2番目のおもりは，さらに $l_2$ のところにつながっており質量は $m_2$ である．それぞれのひもが鉛直線と作る角度をそれぞれ $\theta_1$,$\theta_2$ としてこの2重振り子の運動を考える．ただし運動は垂直な $x$-$y$ 平面内で起こるとし，ひもは振動の間伸びたり，たるんだりすることは無いとする．

1. ラグランジアンを書け．
2. 振れ角 $\theta_1$,$\theta_2$ がともに1より十分小さいという微小振動近似の下で運動方程式を求めよ．
3. 固有振動数を求めよ．

1. それぞれのおもりの運動平面内の座標を $x, y$ と $X, Y$，それぞれの振れ角を $\theta_1, \theta_2$ とすると，座標と振れ角の関係は，

$$x = l_1 \sin\theta_1 \quad , \quad y = -l_1 \cos\theta_1 \quad , \quad X = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \quad , \quad Y = -l_1\cos\theta_1 - l_2\cos\theta_2 \tag{1}$$

すると速度は

$$\dot{x} = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \quad , \quad \dot{y} = l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \quad , \quad \dot{X} = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \quad , \quad \dot{Y} = l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \tag{2}$$

それぞれの速度の2乗は，

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 \quad , \tag{3}$$

$$\begin{aligned} V^2 &= \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2 \\ &= l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \tag{4}$$

よって運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \tag{5}$$

ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= m_1g(l_1+y) + m_2g(l_1+l_2+Y) \\ &= m_1gl_1(1-\cos\theta_1) + m_2gl_1(1-\cos\theta_1) + m_2gl_2(1-\cos\theta_2) \\ &= (m_1+m_2)gl_1(1-\cos\theta_1) + m_2gl_2(1-\cos\theta_2) \end{aligned} \tag{6}$$

ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ &\qquad - (m_1+m_2)gl_1(1-\cos\theta_1) - m_2gl_2(1-\cos\theta_2) \end{aligned} \tag{7}$$

2. ラグランジアンのレベルで微小振動近似は，近似を行う座標の2次の項までを残すことによって行える．そこで振れ角とその微分の2次までを残すと，ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\theta_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\theta_2^2 \tag{8}$$

運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \tag{9}$$

よって

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)gl_1\theta_1 \tag{10}$$

$\theta_2$ に関しては

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \tag{11}$$

よって

$$m_2 l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 = -m_2 g l_2 \theta_2 \tag{12}$$

次の問題のために行列の形に書いておくと

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

3. 固有角速度が $\omega$ と仮定して，方程式に $\theta_1 = A_1 \sin\omega t$,$\theta_2 = A_2 \sin\omega t$ を代入すると

$$\omega^2 \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

これは，行列を左辺に集めると

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(m_1+m_2)l_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2 l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

と書ける．ただし $\lambda = \frac{g}{\omega^2}$．これは $\lambda$ の固有値方程式に他ならない．左辺の行列を計算すると方程式は

$$\begin{pmatrix} l_1 & \frac{m_2 l_2}{(m_1+m_2)} \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

固有値は

$$\det \begin{pmatrix} l_1 - \lambda & \frac{m_2 l_2}{(m_1+m_2)} \\ l_1 & l_2 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

を満たす.

$$(l_1-\lambda)(l_2-\lambda) - \frac{m_2 l_2 l_1}{(m_1+m_2)} = \lambda^2 - (l_1+l_2)x + l_2 l_1 (1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}) = \lambda^2 - (l_1+l_2)\lambda + \frac{l_2 l_1 m_2}{m_1+m_2} = 0 \tag{18}$$

判別式は

$$D = (l_1+l_2)^2 - 4\frac{l_2 l_1 m_2}{(m_1+m_2)} = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 (1 - \frac{2m_2}{m_1+m_2}) = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2} \tag{19}$$

この式より，$D$ は $m_1, m_2$ の値によって

$$(l_1 - l_2)^2 \le D \le (l_1 + l_2)^2 \tag{20}$$

の範囲の値を取ることが分かる.

$$\lambda = \frac{1}{2}\big((l_1+l_2) \pm \sqrt{D}\big) \tag{21}$$

よって，固有角速度は

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{(l_1 + l_2) \pm \sqrt{D}}} \tag{22}$$

２重振り子 (double pendulum) の問題はカオス的振る舞いをすることが知られており，近似をせずに解くことは非常に難しい．ここでは，微小振動の近似の範囲内での固有振動の様子を調べている．微小振動近似をラグランジアンのレベルで行うことは，平衡点からのずれの２次までを残すことに相当する．２重振り子では微小振動近似を行った場合でも，運動方程式の対角化の問題が，いわゆる連成振動の場合と少し異なっていておもしろい．