問題

相対論的粒子の作用

相対論的な粒子の作用は次のように与えられる．

$$S = -mc \int ds \tag{1}$$

ただし，世界線の線素 ds は

$$ds = \sqrt{c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} = c\sqrt{1 - (\frac{\dot{\vec{x}}}{c})^2} dt \tag{2}$$

で与えられる．

1. この作用を $|\vec{v}| \ll c$ として展開し，速度の 2 次までを残すことによって，非相対論的粒子のラグランジアンを導け．
2. 正準運動量 $\vec{p}$ とエネルギー E を求めよ．
3. 運動量とエネルギーの間には
$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4 \tag{3}$$
という関係が成り立つことを示せ．
4. ハミルトニアンを求めよ．

解答

1.
$$S = \int L dt = \int \Big(-mc^2\sqrt{1 - \vec{\beta}^2} \Big) dt \tag{4}$$
なので，相対論的粒子のラグランジアンは
$$L = -mc^2\sqrt{1 - \vec{\beta}^2} \tag{5}$$
とかける．ただし $\vec{\beta} = \dot{\vec{x}}/c$ である．これをテーラー展開すると
$$L = -mc^2(1 - \frac{1}{2}\vec{\beta}^2 + O(\beta^4)) \tag{6}$$
高次の項を無視すると
$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - mc^2 \tag{7}$$
となり，運動エネルギーを $T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ とポテンシャルエネルギーを $V = mc^2$ と見ると
$$L = T - V \tag{8}$$
という非相対論的粒子のラグランジアンになる．古典力学的に考えるとこのポテンシャルエネルギーは定数なので落としてもよい項である．

2. 正準運動量は，定義より
$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^2}} \tag{9}$$

である．エネルギーは，この運動量を使って

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i p_i - L \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{m(\dot{x}^i)^2}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} + mc^2\sqrt{1-\vec{\beta}^2} \\
&= \frac{mc^2\vec{\beta}^2}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} + mc^2\frac{(1-\vec{\beta}^2)}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．

3. 問題の関係式は，エネルギーと運動量の式を代入することで得ることができる．

$$
\begin{aligned}
E^2 - c^2\vec{p}^2 &= \frac{m^2c^4}{1-\vec{\beta}^2} - \frac{m^2c^2(\dot{\vec{x}})^2}{1-\vec{\beta}^2} \\
&= \frac{m^2c^4\left(1-(\dot{\vec{x}}/c)^2\right)}{1-\vec{\beta}^2} \\
&= m^2c^4 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

4. ハミルトニアンを求めるには $\vec{\beta}$ をエネルギーと運動量で表す方法もあるが，問 3 の関係式を使うと簡単に求まる．

$$H = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4} \qquad (12)$$

問 3 の関係式からはマイナス符号が付いた場合も考えられるが，問 2 で $E > 0$ であることから除外する．

相対論的粒子の軌道は世界線の長さが極値を取るようにきまる．このことだけを要請するならば作用は $\int ds$ に比例していればなんでもよい．しかし，問 1 のように，非相対論的な状況では古典的なラグランジアンに一致する必要があることからその比例係数として $-mc$ が定まっている．また，古典力学の正準理論は時間を特別扱いしていて，相対性理論の要請する対称性を崩しているように見える．しかし，問 2，3 でわかるように相対論と矛盾しない結果を与えている．たとえば，正準運動量とエネルギーは $p^0 = E/c$ と定義すると，共役運動量 p^i と組み合わされて

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (mc, m\vec{v})\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (13)$$

と書くことができ，正しいエネルギー・運動量 4 元ベクトルを与える．