問題 (p152 参照)

相対論的荷電粒子の電磁相互作用

電磁場中の相対論的な荷電粒子の作用は次のように与えられる．

$$S = -mc^2\int d\tau + e\int A_\mu u^\mu d\tau \tag{1}$$

ただし，τ は固有時で世界線の線素 ds を使って

$$d\tau = c^{-2}\sqrt{-ds^2} = \sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}dt \tag{2}$$

で与えられる．ただし，$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c}$ また．u^μ は４元速度ベクトル

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}}\frac{dx^\mu}{dt} \tag{3}$$

である．

1. ラグランジュの方程式を求めよ．
2. エネルギー・運動量４元ベクトルの時間微分が満たす共変な運動方程式を求めよ．
3. ハミルトニアンを求めよ．

解答

1. ４元ポテンシャルの定義 $\{A^\mu\} = (\phi/c, \mathbf{A})$ を使って，作用を書きかえると

$$S = \int L dt = \int \Big(-mc^2\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2} - e\phi + \sum eA_k\dot{x}^k\Big)dt \tag{4}$$

となる．ただし $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{x}}/c$ である．よって相対論的粒子のラグランジアンは

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\phi + \sum_k eA_k\dot{x}^k \tag{5}$$

と読み取れる．ここで $\boldsymbol{\beta}^2 = \beta^2$ とかいた．
正準共役運動量は，定義より

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + eA_i \tag{6}$$

である．ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{d}{dt}mu_i + e\frac{\partial}{\partial t}A_i + e\sum_k \dot{x}^k\partial_k A_i = \frac{\partial L}{\partial x^i} = -e\partial_i\phi + e\sum_k \partial_i A_k\dot{x}^k \tag{7}$$

よって

$$\frac{d}{dt}mu_i = e\Big(-\partial_i\phi - \dot{A}_i + (\partial_i A_k - \partial_k A_i)\dot{x}^k\Big) = e(E_i + (\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B})_i) \tag{8}$$

ここで，$u_i = \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$ は４元速度ベクトル u_μ の空間部分である．これを $\mathbf{u} = \{u_i\}$ と表示すると，ラグランジュの運動方程式は次のような形にかける．

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B}) \tag{9}$$

2.
$$m\frac{d}{dt}\sum_i u_i u^i = 2\sum_i u_i \frac{dmu^i}{dt} = 2e\sum_i u^i E_i \tag{10}$$

一方
$$u_\mu u^\mu = u_i u^i - (u^0)^2 = -c^2 \tag{11}$$

なので，
$$m\frac{d}{dt}u^i u_i = 2u^0\frac{mdu^0}{dt} \tag{12}$$

よって
$$u^0\frac{mdu^0}{dt} = e\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{E} \tag{13}$$

$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}$ なので
$$m\frac{du^0}{dt} = e\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E} \tag{14}$$

問 1 の運動方程式 (9) と，ここで得られた u^0 の方程式はそれぞれ
$$u^\mu F_{\mu 0} = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E} \tag{15}$$
$$u^\mu F_{\mu i} = u^0 F_{0i} + u^j F_{ji} = -u^0 E_i/c - (\mathbf{u}\times\mathbf{B}) \tag{16}$$
という関係式を使うと次のように一つにまとめることができる．
$$m\frac{du_\mu}{d\tau} = -eu^\nu F_{\nu\mu} \tag{17}$$

3. ハミルトニアンはラグランジアンのルジャンドル変換で得られる．
$$\begin{aligned} H = p_i\dot{x}^i - L &= (p_i - eA_i)\dot{x}^i + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + e\phi \\ &= \frac{m(\dot{x}_i\dot{x}^i)}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2\sqrt{1-\beta^2} + e\phi \\ &= \frac{m(\dot{x}_i\dot{x}^i) + mc^2(1-\beta^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\phi \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\phi \end{aligned} \tag{18}$$

ここで，$\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{x}}/c$ を運動量で表す必要がある．このためには，共役運動量 (6) の 2 乗 $\mathbf{p}^2$ を $\boldsymbol{\beta}^2$ について解き，ハミルトニアン (18) に代入すればよい．少しエレガントに導くには，次の関係式を使うがよい：
$$\begin{aligned} (H - e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 &= \frac{m^2c^4}{1-\beta^2} - \frac{m^2c^2(\dot{\vec{x}})^2}{1-\beta^2} \\ &= \frac{m^2c^4\big(1 - (\dot{\mathbf{x}}/c)^2\big)}{1-\beta^2} \\ &= m^2c^4 \end{aligned} \tag{19}$$

この関係式から，ハミルトニアンは
$$H = \sqrt{c^2(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2c^4} + e\phi \tag{20}$$
と書けることが分かる．ただし，この方法では平方根を取るときに + の符号を取る必要がある．これは (18) から，$H - e\phi$ が正であるためである．

相対論的粒子の電磁場との相互作用を与えるために作用に加わる項,

$$S_I = e\int A_\mu u^\mu d\tau = \int(-e\phi + A_k\dot{x}^k)dt \tag{21}$$

は，非相対論的な場合に加える項と同じである．これは，問題 2 で分かるようにクーロン・ローレンツ力が相対論的な場合にもそのまま現れることを意味する．
相対論的な粒子のハミルトニアンは，速度が低い時には古典力学の運動エネルギーと一致するものの，その形は古典力学に比べて複雑である．にもかかわらず，電磁場との相互作用の入ったハミルトニアンは古典力学と同様に $\mathbf{p}$ を $\mathbf{p}-e\mathbf{A}$，H を $H-e\phi$ に置き換えたものになっている．この置き換えルールは，量子力学でも使えるもので相互作用のゲージ不変性の帰結である．