相対運動（p.14 より）

2 体の運動

質量が m_1, m_2 のボールが相互の距離のみによるポテンシャル V で力を及ぼしながら運動している．それぞれのボールの位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ とする．

1. ラグランジアンを書け．
2. 重心座標と相対座標を導入して，重心運動と相対運動のラグランジアンを求めよ．
3. 距離に比例する引力が働いているときのポテンシャル V とラグランジュ方程式を求めよ．
4. 2 体間に距離に比例する引力が働くとき，重心系で相対運動が楕円運動であることを示せ．

1. 2 体の距離を $r = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}$ とすると
$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(r) \tag{1}$$
2. 重心座標を
$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$
相対座標を
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{3}$$
とする．$M = m_1 + m_2$ とすると
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \tag{4}$$
なので，代入すると
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}})^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\left(m_1(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}})^2 + m_2(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}})^2\right) - V(r) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \end{aligned} \tag{5}$$
$\frac{m_1m_2}{M}$ は換算質量と呼ばれる量で，$\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ と書くとラグランジアンは
$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r) \tag{6}$$
となる．よって 2 体のラグランジアンは，重心運動が自由粒子のラグランジアンに，相対運動は中心力ポテンシャル $V(r)$ の下での質量 μ の粒子の運動のラグランジアンにそれぞれ分解する．
3. ポテンシャルは $V = \frac{1}{2}kr^2$ で与えられる．これは調和振動子と呼ばれる．運動方程式は
$$\nabla V = k\mathbf{r} \tag{7}$$

であることから

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} \tag{8}$$

になる．

4. 調和振動子ポテンシャルの場合は，中心力であるが極座標を取るよりはデカルト座標のままの方が解を求めやすい．デカルト座標を $\mathbf{r} = (q_1, q_2, q_3)$ と表示すると相対運動に関するラグランジアンは

$$L_{\text{相対}} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}\mu(\dot{q}_i^2 - \omega^2 q_i^2) \tag{9}$$

となる．ただし $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$. ラグランジュ方程式は

$$\ddot{q}_i = -\omega^2 q_i \tag{10}$$

と，それぞれ独立した調和振動子の運動方程式になる．この方程式の解はすべての座標について角速度が共通，つまり周期が共通の振動解

$$q_i = A_i \sin(\omega t + \alpha_i) \tag{11}$$

で与えられる．A_i と α_i は初期条件によって定まる積分定数である．角運動量が保存することから，運動は角運動量ベクトルに垂直な平面内で起こる．そこで，その平面が 1-2 平面になるように座標系をとっても一般性を失わない．すると，解は

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \quad , \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \tag{12}$$

で与えられるが，これは楕円の媒介変数表示になっている．よって，運動は周期が $T = \frac{2\pi}{\omega}$ の楕円運動になる．

２体の孤立系の問題である．古典力学の問題としては連星系などが考えられるが，同様の座標変換は２原子分子などにも現れる．ここに現れる座標変換は線形変換なので運動方程式の段階で変数変換を行ってもさほど複雑になることはないが，やはりラグランジアンの段階で行えば見通しがよい．
ここで考えている３次元調和振動子の問題もいろいろな所で姿を変えて現れる．古典力学的に解ける中心力の問題はこの調和振動子の問題と力が距離の逆２乗に比例する，いわゆるケプラー問題である．共に楕円軌道が解になるが，３次元調和振動子では楕円の中心に一方の物体があるが，ケプラー問題では楕円の焦点に一方の物体があることになる．いずれの場合も面積速度が一定であることが確認できる．